

Die Allgemeine Relativitätstheorie

V 1.2 bearbeitete Version

Günter Opitz-Ohlsen

ART

Danksagung

Hiermit möchte ich Herrn Professor Paul Wagner dafür danken, dass er seine Vorlesungen über die Tensorrechnung über das Portal YouTube öffentlich gemacht hat. Mein Manuskript besteht zum großen Teil aus der Mitschrift dieser Vorlesungen.

Nicht zuletzt danke ich Herrn Leonard Susskind, der ebenfalls über YouTube Vorlesungen zu vielen physikalischen Themen veröffentlicht hat, und von mir als Quelle interessanter Beispiele genommen wurde.

Günter Opitz-Ohlsen, Berlin, im Januar 2024

Vorwort

Stellt man sich ein elastisches Tuch vor, in das man eine schwere Kugel legt, so krümmt sich das Tuch. Bewegt sich nun eine Murmel auf dieser gekrümmten Fläche, so wird sich die Murmel spiralförmig auf die schwere Kugel zu bewegen, falls die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel klein genug ist. Vergrößert man die Anfangsgeschwindigkeit der Murmel, so kann man erreichen, dass die Murmel sich auf einer gekrümmten Bahn an der schweren Kugel vorbeibewegt. Denkt man sich das elastische Tuch weg, dann würde man ebenfalls die verschiedenen Bahnen der Murmel beobachten. Isaac Newton¹ hat den Grund für dieses Verhalten in der Massenanziehung – der Gravitation – gesehen. Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie liegt allerdings der Grund für das Bewegungsverhalten der Murmel in der Krümmung der Raumzeit. Massen ziehen sich also nicht an, sondern krümmen die Raumzeit wie eine schwere Kugel ein elastisches Tuch. Die Gravitation ist also keine Kraft, sondern die Ursache für diese Raumzeitkrümmung. Dieses Verhalten der Raumzeit wird durch die Feldgleichungen beschrieben, die Einstein 1915 gefunden hatte und die J.A. Wheeler treffend im folgenden Satz zusammengefasst hat:

”Matter tells space how to curve and spacetime tells matter how to move!”²

Erschwerend kommt bei dieser Vorstellung hinzu, dass es sich bei der Raumzeit um eine vierdimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit handelt. Bernhard Riemann³ war der erste Mathematiker, der die Geometrie auf nicht euklidischen Räumen – den Räumen unserer Anschauung – untersucht und dabei den Ableitungsbegriff, den man aus dem Oberstufenunterricht kennt, auf diese Räume erweitert hat.

Lokal sieht so eine Mannigfaltigkeit flach aus, d. h. sie hat lokal keine Krümmung. Dieses Prinzip hat Einstein verwendet, um die Feldgleichungen herzuleiten. Er machte dazu folgendes Gedankenexperiment: Befindet sich man in einem frei fallenden Bezugssystem, z. B. einem Labor, das keine Verbindung zur Außenwelt hat, dann kann man durch kein physikalisches Experiment unterscheiden, ob man sich im gravitationsfreien Raum oder im freien Fall in einem Gravitationsfeld befindet. Lokal kann man also in einer solchen Situation das Gravitationsfeld nicht erkennen. Ist man umgekehrt in einem beschleunigten Labor, das keine Verbindung zur Außenwelt hat, dann kann man nicht unterscheiden, ob man sich in Ruhe in einem Gravitationsfeld, z. B. hier auf der Erde, oder in einem Raumschiff im Weltall befindet, das gleichmäßig beschleunigt wird.

Dieses Prinzip nannte Einstein das Äquivalenzprinzip. Da er zuvor die spezielle Relativitätstheorie entdeckt hatte, bedeutet dies, dass man sich lokal immer in einem Minkowskiraum befindet. Der Minkowskiraum ist eine flache vierdimensionale Mannigfaltigkeit, die durch eine Metrik beschrieben wird, aus der man die Gleichungen der speziellen Relativitätstheorie herleiten kann.

Wie kann man die Krümmung der Raumzeit – dies ist die vierdimensionale Mannigfaltigkeit – berechnen? Dazu muss man eine Bewegung vollziehen, die jemanden an den Anfangspunkt der Bewegung zurückbringt. Da die Bewegung sich lokal in jedem Punkt im Minkowskiraum vollzieht, wird derjenige, der sich in einem Labor befindet, dass keine Verbindung zur Außenwelt hat, diese Krümmung auch nicht bemerken. Es sei denn, er vergleicht räumliche Größen mit dem Anfang der Bewegung und dem Ende. Wenn man sich zum Beispiel vom Nordpol aus zum Äquator bewegt, dann

1 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Isaac_Newton

2 Zitiert nach John Archibald Wheeler, Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/John_Archibald_Wheeler

3 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

wird sich der Vektor, der die Bewegungsrichtung anzeigt, immer tangential zum Weg sein. Wir können uns also vorstellen, dass wir in einem Auto diesen Weg auf der Kugeloberfläche der Erde zurücklegen. Montiert man am Lenkrad eines Autos einen Pfeil, der in die Bewegungsrichtung zeigt, dann wird sich dieser nicht verändern. Wenn wir dann unser Lenkrad um 90° drehen, um den Äquator entlangzufahren, dann wird dieser Pfeil senkrecht zur Bewegungsrichtung verlaufen. Drehen wir uns mit unserem Fahrzeug erneut auf einem Punkt des Äquators zurück, um dann wieder zum Nordpol zu gelangen, dann wird der Pfeil wieder in die Bewegungsrichtung zeigen. Wenn wir aber am Ausgangspunkt angelangt sind und wir den Pfeil im Auto mit dem Pfeil vergleichen, den wir am Anfang der Bewegung markiert haben, dann werden wir feststellen, dass die Pfeile nicht übereinstimmen. Dieser Unterschied ist ein Maß für die Krümmung der Raumzeit und wird durch den Riemannschen Krümmungstensor beschrieben.

Um den Riemannschen Krümmungstensor herzuleiten, braucht man eine Metrik, die angibt, wie man Längen auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit misst. Hat man diese Metrik, kann man zu jedem Weg in dieser Mannigfaltigkeit eine Verbindungskurve konstruieren, entlang derer man einen Vektor im Tangentialraum der Mannigfaltigkeit parallel verschieben kann. Verschiebt man dann einen solchen Vektor entlang einer geschlossenen Kurve, so erhält man den Riemannschen Krümmungstensor. Zur Berechnung des Riemannschen Krümmungstensor ist also nur die Verbindung wichtig, die zwei Punkte auf der Mannigfaltigkeit mit einem Weg verbindet, entlang dessen man einen Vektor parallel verschieben kann. Diese Verbindung kann man über die Metrik berechnen und damit auch den Krümmungstensor. Man nennt diese Verbindung auch einen Schnitt im Tangentialraum der Mannigfaltigkeit. Hat man einen Schnitt im Tangentialraum der Mannigfaltigkeit, so kann man jeden anderen Vektor im Tangentialraum der Mannigfaltigkeit parallel entlang dieses Schnittes bewegen. Dabei ändert sich der Winkel zwischen Schnittvektor und parallel verschobenen Vektor nicht.

Der erste Teil dieser Abhandlung beschäftigt sich mit diesem rein mathematischen Thema. Dabei spielen gewisse mathematische Objekte eine zentrale Rolle, die man Tensoren nennt. Eine Gleichung, die man mit Tensoren aufstellt, gilt dabei für jede Koordinatentransformation. Koordinaten sind dabei Zahlentupel, mit der man die Riemannsche Mannigfaltigkeit lokal beschreiben kann. Dies war auch der Grund für Einstein, mit Tensoren Gleichungen aufzustellen, weil die physikalischen Gesetze in jedem Koordinatensystem gültig sein sollen. Eine schwere Aufgabe für Einstein, weil es ca. drei Jahre dauerte, bis er die richtigen geometrischen Tensoren für seine Feldgleichungen gefunden hatte.

Der zweite Teil der Abhandlung ist der physikalische Teil. Er bezieht sich auf den Energie-Impuls-Tensor und versucht, bekannte Ergebnisse über Schwarze Löcher mathematisch zu reproduzieren.

Diese Abhandlung richtet sich an Leser, die die mathematischen Grundlagen der einsteinschen Feldgleichungen kennenlernen wollen, weil alle mathematischen Begriffe dafür sehr ausführlich behandelt werden und mit Beispielrechnungen unterlegt sind, die hoffentlich dazu beitragen, die Begriffe transparenter zu machen.

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die Herleitung der einsteinschen Feldgleichungen auch über das Prinzip der kleinsten Wirkung vollzogen werden kann. Da dieses Prinzip recht universell auch in der Quantenmechanik gilt, wäre dieser Zugang systematischer. Das Prinzip ist ein Bindeglied zwischen Allgemeiner Relativitätstheorie und Quantenmechanik oder Quanten-Feld-Theorie. Diese

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Art der Herleitung stammt vom deutschen Mathematiker David Hilbert und wird hier nicht besprochen⁴. Die Herleitung auf dem Prinzip der kleinsten Wirkung wird im Abschnitt Hamiltonsche Mechanik besprochen. Die Hilbert-Wirkung der allgemeinen Relativitätstheorie ist dabei durch folgenden Ausdruck gegeben: $W_{\text{grav}}(g) = \frac{c^4}{16 \cdot \pi \cdot G} \cdot \int \sqrt{(|\det[g(x)]|)} R(g(x)) d^4 x$, wobei g der metrische Tensor und R der Ricci-Skalar ist.

4 Siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Einstein-Hilbert-Wirkung>

Inhaltsverzeichnis

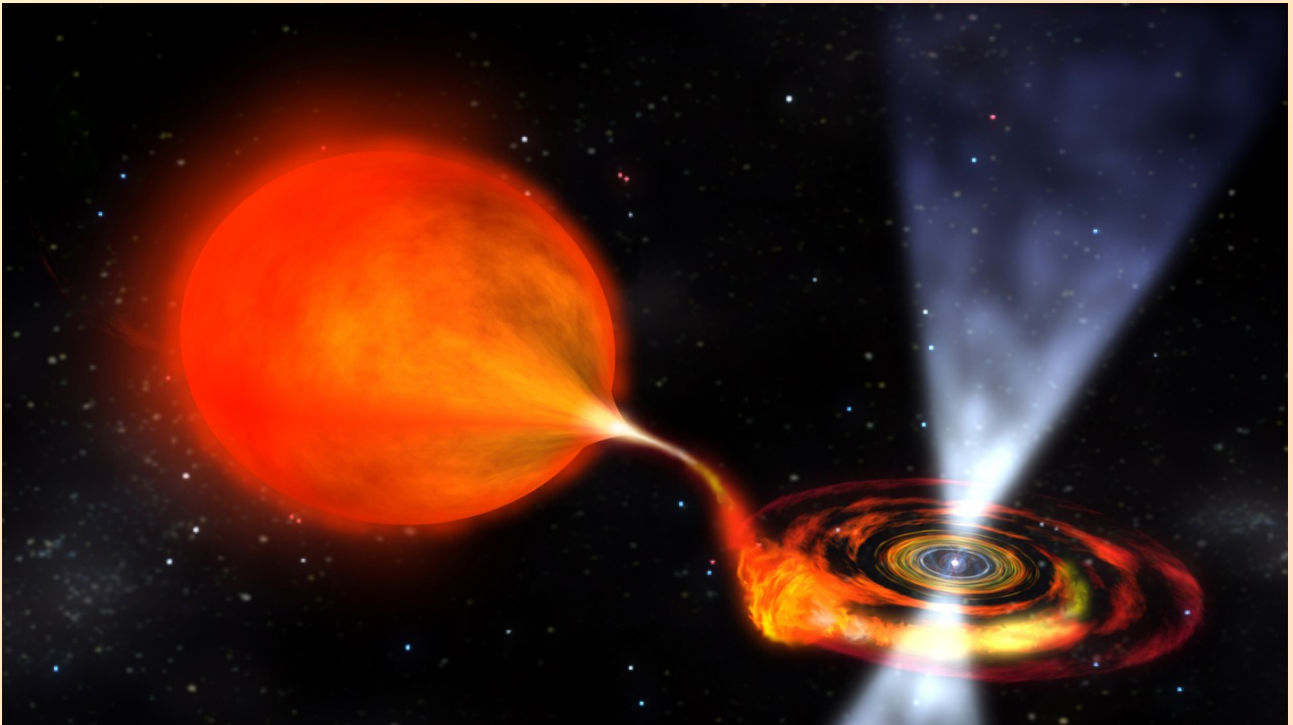
| | |
|---|----|
| Danksagung..... | 2 |
| Vorwort..... | 3 |
| Teil I: Die Mathematik der linken Seite der einsteinschen Feldgleichungen oder die Geometrie der Raumzeit..... | 9 |
| Kapitel I: Lineare Algebra - Tensorrechnung..... | 10 |
| 1.1 Der kovariante Metriktensor..... | 10 |
| 1.2 Der kontravariante Metriktensor..... | 12 |
| 1.3 Die kovarianten und kontravarianten Koordinaten eines Vektors..... | 14 |
| 1.4 Das Transformationsverhalten kovarianter und kontravarianter Vektoren..... | 15 |
| 1.5 Zusammenfassung..... | 18 |
| 1.6 Rechenbeispiel..... | 19 |
| 1.7 Die Tensoralgebra..... | 21 |
| 1.8 Basis des Tensorproduktes..... | 23 |
| 1.9 Lineare Abbildungen als Tensorprodukt..... | 23 |
| 1.10 Bilinearform..... | 24 |
| 1.11 Tensorverjüngung..... | 26 |
| 1.12 Pseudotensor: Der kovariante Epsilon-Tensor im dreidimensionalen Raum..... | 28 |
| 1.13 Das Vektorprodukt..... | 31 |
| Kapitel II: Differenzialrechnung und Integralrechnung..... | 34 |
| 2.1 Vektorfelder..... | 34 |
| 2.2 Differenzialoperatoren in kartesischen Koordinaten oder im Euklidischen Raum..... | 35 |
| 2.3 Das Wegintegral..... | 38 |
| 2.4 Das Oberflächenintegral..... | 40 |
| 2.5 Das Volumenintegral..... | 42 |
| 2.6 Beispiele und Bedingungen für Potenziale..... | 43 |
| Kapitel III: Krummlinige Koordinaten..... | 46 |
| 3.1 Kurven und Hyperflächen..... | 46 |
| 3.2 Ko- und kontravariante Vektorraumbasen oder Tangential- und Kotangentialräume..... | 51 |
| 3.3 Beispiele..... | 52 |
| 3.3.1 Kugelkoordinaten..... | 52 |
| 3.3.2 Koordinatentransformation von Zylinderkoordinaten (r, θ, z) in kartesische Koordinaten (x, y, z) | 54 |
| 3.3.3 Schiefes Koordinatensystem..... | 55 |
| 3.4. Transformationsverhalten von krummlinigen Koordinaten..... | 56 |
| 3.5. Tensoren..... | 60 |
| 3.6. Bogenlängen von Kurven und der Metriktensor..... | 62 |
| Kapitel IV: Die kovariante Ableitung..... | 64 |
| 4.1. Motivation..... | 64 |
| 4.2. Die kovariante Ableitung..... | 66 |
| 4.3. Beispiele..... | 71 |
| 4.3.1 Die Christoffelsymbole..... | 71 |
| 4.3.2 Kovariante Ableitung eines parallelen Vektorfeldes in Polarkoordinaten..... | 74 |
| 4.3.3 Differenzialoperatoren in allgemeinen Koordinaten..... | 76 |

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

| | |
|--|-----|
| 4.4 Eigenschaften der kovarianten Ableitung..... | 78 |
| 4.5 Höhere kovariante Ableitungen – der Riemannsche Krümmungstensor..... | 79 |
| Kapitel V Geometrische Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie..... | 81 |
| 5.1 Die Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors..... | 81 |
| 5.2 Die Einsteinsche Feldgleichung..... | 84 |
| 5.3 Nachtrag..... | 86 |
| 5.3.1 Geodätische Linien..... | 86 |
| 5.3.2 Parallele Vektoren..... | 90 |
| Teil II: Die Physik der Feldgleichungen oder der Energie-Impuls-Tensor..... | 94 |
| <i>Kapitel I: Physikalische Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie</i> | 95 |
| 1.1 Die Feldgleichung der Gravitation klassisch..... | 95 |
| 1.1.1 Beschleunigung im Innern der Erde..... | 98 |
| 1.2 Die Postulate der Allgemeinen Relativitätstheorie..... | 100 |
| 1.2.1 Beispiele frei fallender Bezugssysteme..... | 102 |
| Kapitel II: Der Minkowskiraum und die Spezielle Relativitätstheorie..... | 106 |
| 2.1 Der Minkowskiraum..... | 106 |
| 2.2 Kurven im Minkowskiraum..... | 109 |
| 2.3 Die Spezielle Relativitätstheorie..... | 113 |
| Kapitel III: Die klassische Mechanik..... | 117 |
| 3.1 Schwarzschildradius klassisch..... | 117 |
| 3.2 Schwarzschilddichte und Ereignishorizont des Universums..... | 122 |
| 3.3 Hamiltonsche Mechanik..... | 125 |
| 3.3.1 Das Fermatsche Prinzip..... | 125 |
| 3.3.2 Brachistochrone..... | 129 |
| Kapitel IV: Die Feldgleichungen..... | 134 |
| 4.1 Die Feldgleichungen im materiefreien Raum..... | 134 |
| 4.1.1 Die Bedingungen an die Feldgleichungen..... | 134 |
| 4.2 Die Bewegungsgleichungen der ART in Newtonscher Näherung..... | 136 |
| 4.3 Die Krümmung für schwache Felder..... | 138 |
| 4.4 Die Herleitung der Feldgleichung..... | 141 |
| Kapitel V: Lösungen der Feldgleichungen..... | 144 |
| 5.1 Die linke Seite der Feldgleichung..... | 144 |
| 5.2 Die äußere Schwarzschild Lösung..... | 147 |
| 5.3 Die innere Schwarzschildlösung..... | 151 |
| 5.4 Die Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik oder der Raum expandiert..... | 160 |
| 5.5 Der De-Sitter-Raum und der Anti-De-Sitter-Raum..... | 177 |
| 5.6 Das Gödel-Universum oder die Reise in die Vergangenheit..... | 183 |
| 5.6.1 Die Metrik..... | 183 |
| 5.6.2 Rotationssymmetrie..... | 186 |
| 5.7 Schwache Gravitationswellen..... | 191 |
| 5.7.1 Einführung..... | 191 |
| 5.7.2 Herleitung..... | 195 |
| 5.8 Schwarze Löcher..... | 202 |
| 5.8.1 Die Entropie und der Ereignishorizont Schwarzer Löcher..... | 202 |
| 5.8.2 Die Hawking Strahlung..... | 203 |
| 5.8.3 Singularitätstheoreme..... | 209 |
| 5.8.3.1 Vorbereitung..... | 210 |

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

| | |
|---|-----|
| 5.8.3.2 Raychaudhuri's Gleichung..... | 219 |
| 5.8.3.3 Hawking-Singularität..... | 223 |
| 5.8.3.4 Penrose Singularität..... | 226 |
| 5.8.4 Der Metriktenor rotierender und nicht rotierender Schwarzen Löcher..... | 232 |
| 5.8.4.1 Die Schwarzschildmetrik..... | 232 |
| 5.8.4.1.1 Zeitdilatation Schwarzschildmetrik..... | 237 |
| 5.8.4.2 Die Reissner-Nordström-Metrik..... | 240 |
| 5.8.4.2.1 Zeitdilatation der Reissner-Nordström-Metrik..... | 245 |
| 5.8.4.2.2 Besondere Bereiche der Reissner-Nordström-Metrik..... | 250 |
| 5.8.4.3 Die Kerr-Metrik..... | 253 |
| 5.8.4.4 Die Bereiche eines rotierenden, ungeladenen Schwarzen Lochs..... | 261 |
| 5.8.4.4.1 Die Zeitdilatation der Kerr-Metrik..... | 262 |
| 5.8.4.4.2 Die Ergosphären..... | 266 |
| 5.8.4.4.3 Die Ringsingularität..... | 272 |
| 5.8.4.4.4 Die Ereignishorizonte..... | 273 |
| 5.8.4.5 Die Kerr-Newman-Metrik..... | 275 |
| 5.8.4.6 Zusammenfassung Metrik Schwarzer Löcher..... | 285 |
| 5.8.4.6.1 Die Einsteintensoren..... | 285 |
| 5.8.4.6.2 Die Bereiche rotierender Schwarzer Löcher..... | 285 |
| Anhang..... | 289 |
| A.1 Die Planckeinheiten..... | 289 |
| A.2 Aufbau der Materie..... | 291 |
| A.3 Die Gravitationskonstante..... | 291 |
| A.4 Lichtjahr..... | 292 |
| A.5 Der Energie-Impulstensor..... | 292 |
| A.6 Größe des Universums..... | 294 |
| Nachwort..... | 295 |



Neutronenstern und Roter Riese, Bildquelle: NASA/Dana Berry; Lizenz: gemeinfrei

Teil I: Die Mathematik der linken Seite der einsteinschen Feldgleichungen oder die Geometrie der Raumzeit

Kapitel I: Lineare Algebra - Tensorrechnung

1.1 Der kovariante Metriktensor

Bei den folgenden Überlegungen soll V ein endlich dimensionaler Vektorraum über \mathbb{R} mit einem Skalarprodukt sein. Der Vektorraum wird durch Basisvektoren \vec{g}_i $i=1, \dots, n$ erzeugt oder aufgespannt. Das heißt, dass man jeden Vektor des Vektorraumes als Linearkombination der Basisvektoren schreiben kann: $\vec{a} = \sum_{i=1}^n a^i \cdot \vec{g}_i$. **Achtung:** a^i ist nicht die i -te Potenz der

Variablen a , sondern die i -te Komponente des Vektors \vec{a} . Der Buchstabe i ist ein Index!

Man nennt die Symbole a^i die **kontravarianten** Komponenten des Vektors \vec{a} bezogen auf die **kovariante** Basis \vec{g}_i . Die Summe enthält den Summationsindex i , der bei den Komponenten oben und bei den Basisvektoren unten vorkommt. In diesem Fall schreibt man einfach: $\vec{a} = a^i \cdot \vec{g}_i$ und nennt dies die **einsteinsche Summenkonvention**. Für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = a^i \cdot \vec{g}_i$ und $\vec{b} = b^j \cdot \vec{g}_j$ kann man dann mit der Summenkonvention $\vec{a} \cdot \vec{b} = a^i \cdot b^j \cdot \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$ schreiben, weil es linear und kommutativ ist. Die Skalarprodukte der Basisvektoren $\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$ sind reelle Zahlen, die man mit $\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = g_{ij}$ bezeichnet. Damit erhält man die Formel:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ij} \cdot a^i \cdot b^j.$$

Man nennt die Matrix (g_{ij}) den **Metriktensor**, weil man damit die quadratische Länge eines Vektors bezüglich einer Vektorraumbasis \vec{g}_i $i=1, \dots, n$ berechnen kann:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = g_{ij} \cdot a^i \cdot a^j.$$

In der Hauptdiagonalen des Metriktensors stehen die $\vec{g}_i \cdot \vec{g}_i = g_{ii}$, also die quadratischen Längen der Basisvektoren. Da das Skalarprodukt kommutativ ist, ist der Metriktensor symmetrisch, d. h.:

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = g_{ij} = g_{ji} = \vec{g}_j \cdot \vec{g}_i.$$

Berechnet man die Determinante des Metriktensors, so kann man das Volumen des durch die Basisvektoren aufgespannten Parallelotops berechnen:

$$\text{Vol} = \sqrt{|\det(g_{ij})|}.$$

Die Determinante des Metriktensor kürzt man mit $g = \det(g_{ij})$ ab und erhält:

$$\text{Vol} = \sqrt{|g|}.$$

Der Metriktensor ist also die zentrale Größe, um **Längen, Winkel, Flächen und Volumen** in einem Vektorraum zu berechnen, der keine **Orthonormalbasis** hat, d. h. die Basisvektoren haben nicht alle die Länge 1 und stehen nicht alle paarweise senkrecht aufeinander. Bei einer Orthonormalbasis

\vec{g}_i $i=1, \dots, n$ gilt aber $\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = g_{ij} = 0$ falls $i \neq j$ und $\vec{g}_i \cdot \vec{g}_i = g_{ii} = 1$ sonst. Der Metriktensor bezüglich einer Orthonormalbasis ist also durch die Einheitsmatrix, die in der Hauptdiagonalen nur Einsen und sonst nur Nullen stehen hat, gegeben. Wir bezeichnen die Einheitsmatrix mit δ_i^j und erhalten: $g_{ij} = \delta_i^j$ falls \vec{g}_i eine Orthonormalbasis ist.

Tensoren sind noch zu definierende Elemente. Ich werde später darauf zurückkommen. Der Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Tensoren besteht in ihrem Transformationsverhalten bei einem Basiswechsel. Auch dies wird später erst behandelt.

Den Metriktensor kann man auch für **krummlinige** Koordinaten definieren. Dabei ändern sich die Basisvektoren der Vektorräume entlang der **Koordinatenlinien**, die durch die krummlinigen Koordinaten festgelegt sind. Der Metriktensor ist dann punktweise definiert. Der Punkt, um den es geht, ist durch die krummlinigen Koordinaten gegeben. Die Basisvektoren des dazugehörigen Vektorraums sind die **Tangentialvektoren** entlang der krummlinigen Koordinatenlinien in diesem Punkt. Damit wird sich der Metriktensor auch in Abhängigkeit des Punktes, den man in krummlinigen Koordinaten gegeben hat, verändern. Standardkoordinaten für krummlinige Koordinatensystem sind die **Kugelkoordinaten** oder die **Zylinderkoordinaten**. Wir werden später sehen, wie sich die Basisvektoren und der Metriktensor punktweise verändern, wenn man mit diesen Koordinatensystemen arbeitet.

Während man mit Kugelkoordinaten oder Zylinderkoordinaten noch alle Punkte im Euklidischen Raum beschreiben kann, der als Vektorraum eine orthonormale Basis besitzt, kann man bei manchen Räumen dies nicht mehr tun. Hier ist es nur lokal möglich, Koordinaten so zu wählen, dass man in einer Umgebung eines Punktes alle Punkte in dieser Umgebung mit den lokalen Koordinaten eindeutig beschreiben kann. Solche Räume nennt man **Mannigfaltigkeiten**. Damit man auf diesen Räumen Geometrie betreiben kann, also die Möglichkeit hat, Längen, Winkel und daraus abgeleitete geometrische Größen zu definieren, muss man über ein Skalarprodukt, eine Metrik verfügen. Diese Art von Mannigfaltigkeiten nennt man **Riemannsche Räume**. **Bernhard Riemann**⁵ hat die Geometrie auf diesen nicht Euklidischen Räumen entwickelt. Ein zentraler Begriff ist dabei die Krümmung, und es wird sich später herausstellen, dass Riemannsche Räume flach sind, so wie der Euklidische Raum es ist, genau dann, wenn der **Krümmungstensor** 0 ist. Um aber Krümmungen zu berechnen, benötigt man einen Ableitungsbegriff auf den Riemannschen Räumen. Es handelt sich dabei um die sogenannte **kovariante Ableitung**, zu der es natürlich auch eine **kontravariante Ableitung** gibt. Dieses Konzept hat **Albert Einstein**⁶ für die **Feldgleichungen** der **Allgemeinen Relativitätstheorie**⁷ benutzt, die in etwa folgendes bedeuten: Die **Krümmung der Raumzeit** ist äquivalent zur **Gravitation**.

5 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

6 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Albert_Einstein

7 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Einsteinsche_Feldgleichungen

1.2 Der kontravariante Metriktensor

Zu jeder kovarianten \vec{g}_i $i=1, \dots, n$ Basis existiert in eindeutiger Form eine kontravariante Basis oder **duale Basis** des **dualen Vektorraums** $V^*=L(V, \mathbb{R})$ aller Linearformen von V nach \mathbb{R} , die man mit \vec{g}^i $i=1, \dots, n$ bezeichnet. Eine Linearform ist eine lineare Abbildung von V nach \mathbb{R} . Die Menge der Linearformen bilden ebenfalls einen Vektorraum, den man mit V^* bezeichnet.

Man kann diesen Vektorraum über das in V gegebene Skalarprodukt mit V isomorph oder strukturerhaltend abbilden. Dazu setzt man: $\vec{g}^i = \vec{g}^i \cdot \vec{g}_j = 0$ für $j \neq i$ und $\vec{g}^i = \vec{g}^i \cdot \vec{g}_i = 1$. Dies liefert die implizite Bedingung für die kontravariante Basis:

$$\vec{g}^j \cdot \vec{g}_i = \delta_i^j.$$

Die lineare Abbildung $\Phi_{\vec{g}_i} \in V^* = L(V, \mathbb{R})$ ist dann durch $\Phi_{\vec{g}_i}(\vec{v}) = \vec{g}^j \cdot \vec{v}$ gegeben.

Geometrisch bedeutet das, dass der kontravariante Basisvektor \vec{g}^i senkrecht auf allen anderen kovarianten Basisvektoren \vec{g}_j steht, wenn $i \neq j$ gilt. Zur kontravarianten Basis gehört der kontravariante Metriktensor:

$$g^{ij} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j.$$

Zuerst sollen die kontravarianten Basisvektoren \vec{g}^j berechnet werden, wenn die kovarianten Basisvektoren \vec{g}_i gegeben sind. Dazu macht man folgenden Ansatz:

$$\vec{g}^i = A^{ij} \cdot \vec{g}_j.$$

Summiert wird über j (einsteinische Summenkonvention) und (A^{ij}) ist die Umrechnungsmatrix. Multipliziert man die obere Gleichung skalar mit \vec{g}^k so erhält man:

$$\vec{g}^i \cdot \vec{g}^k = A^{ij} \cdot \vec{g}_j \cdot \vec{g}^k \text{ bzw.}$$

$$g^{ik} = A^{ij} \cdot \delta_j^k.$$

Da aber δ_j^k nur für $j=k$ einen Betrag liefert, können wir in der Summe den Index j gegen k austauschen. Übrig bleibt nur ein Summand A^{ik} . (g^{ik}) und (A^{ik}) sind also dieselben Matrizen. Da in der Tensorrechnung sehr stark mit mehrfach indizierten Größen gearbeitet wird, formuliert man folgende Regel:

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

R1: Austausch der Indizes (Tensorverjüngung): $X^j \cdot \delta_j^k = X^k$ mit dem Summationsindex j und den freien Index k . Analog dazu hat man im dualen Fall: $X_j \cdot \delta_k^j = X_k$.

Als vorläufiges Ergebnis erhält man: $\vec{g}^i = g^{ij} \cdot \vec{g}_j$ mit dem Summationsindex j und den freien Index i . Analog dazu hat man im kovarianten Fall: $\vec{g}_k = g_{kl} \cdot \vec{g}^l$. Um dies zu sehen, führt man dieselben Rechnungen wie zuvor mit umgekehrten Indizes aus. Bildet man das Skalarprodukt, so erhält man:

$$\delta_k^i = \vec{g}^i \cdot \vec{g}_k = g^{ij} \cdot \vec{g}_j \cdot g_{kl} \cdot \vec{g}^l = g^{ij} \cdot g_{kl} \cdot \vec{g}_j \cdot \vec{g}^l.$$

Nach der einsteinschen Summenkonvention wird über die Indizes j und l summiert. Dies liefert das vorläufige Ergebnis: $\delta_k^i = g^{ij} \cdot g_{kl} \cdot \delta_j^l$. Wendet man die Regel über den Austausch der Indizes an, liefert das: $\delta_k^i = g^{ij} \cdot g_{kj}$. Da aber der Metriktensor symmetrisch ist, gilt: $g_{kj} = g_{jk}$ und man erhält: $\delta_k^i = g^{ij} \cdot g_{jk}$. Hier ist j der Summationsindex und i und k sind frei wählbar. Die Summen $g^{ij} \cdot g_{jk}$ sind aber die Einträge einer Matrix $c_{ik} = g^{ij} \cdot g_{jk}$ die wegen der rechten Seite der letzten Gleichung die Einheitsmatrix ergeben muss. Also ist der kontravariante Metriktensor die inverse Matrix zum kovarianten Metriktensor. Damit haben wir das endgültige Ergebnis gefunden:

$$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1} \text{ oder } (g_{ij}) = (g^{ij})^{-1}.$$

In der Herleitung des kontravarianten Metriktensors hat man folgenden Zusammenhang zwischen kovarianten und kontravarianten Basisvektoren benutzt:

$$\vec{g}^i = g^{ij} \cdot \vec{g}_j \quad \text{bzw.}$$

$$\vec{g}_i = g_{ij} \cdot \vec{g}^j.$$

Auch hier ist bezüglich einer orthonormierten Basis: $g^{ij} = \delta_i^j$. Deshalb stimmen die kovarianten und kontravarianten Vektorraumbasen überein: $\vec{g}^i = \delta_i^j \cdot \vec{g}_j = \vec{g}_i$.

1.3 Die kovarianten und kontravarianten Koordinaten eines Vektors

$\vec{a} = a^i \cdot \vec{g}_i$. Die a^i nennt man die kontravarianten **Komponenten oder Koordinaten** des Vektors \vec{a} bezüglich einer Basis \vec{g}_i .

$\vec{a} = a_i \cdot \vec{g}^i$. Die a_i nennt man die kovarianten Komponenten oder Koordinaten des Vektors \vec{a} bezüglich einer Basis \vec{g}^i .

Den Zusammenhang der beiden Komponenten erhält man auf folgende Weise:

$a^i \cdot \vec{g}_i = a_i \cdot \vec{g}^i$. Man multipliziert beide Seiten der Gleichung skalar mit \vec{g}^k . Dies liefert: $a^i \cdot \delta_i^k = a_i \cdot \vec{g}^i \cdot \vec{g}^k$. Aber die Skalarprodukte $\vec{g}^i \cdot \vec{g}^k$ sind Einträge des Metriktensors (g^{ik}) . Und damit erhält man mit Regel 1 auf der linken Seite der Gleichung $a^i \cdot \delta_i^k = a_i \cdot \vec{g}^i \cdot \vec{g}^k$:

$$a^k = a_i \cdot g^{ik}.$$

Analog ergibt sich der Zusammenhang zwischen den kovarianten Komponenten oder den Koordinaten des Vektors $\vec{a} = a_i \cdot \vec{g}^i$:

$$a_k = a^i \cdot g_{ik}.$$

Damit erhält man, dass der Zusammenhang zwischen den Komponenten eines Vektors der gleiche Zusammenhang ist wie zwischen den Basisvektoren des Vektors.

Die beiden Matrizen (g_{ij}) und (g^{ij}) sind die kovarianten und kontravarianten **Metriktensoren** und invers zueinander: $g_{ij} \cdot g^{jk} = \delta_k^i$.

| Ergebnis | Umrechnung Ko nach Kontra | Umrechnung Kontra nach Ko |
|-------------|--------------------------------------|--------------------------------------|
| Basis | $\vec{g}^i = g^{ij} \cdot \vec{g}_j$ | $\vec{g}_i = g_{ij} \cdot \vec{g}^j$ |
| Komponenten | $a^k = a_i \cdot g^{ik}$ | $a_k = a^i \cdot g_{ik}$ |

1.4 Das Transformationsverhalten kovarianter und kontravarianter Vektoren

Eine lineare Beziehung von Vektorbasen: $\vec{\hat{g}}_i = a_i^j \cdot \vec{g}_j$ mit der einsteinschen Summenkonvention geschrieben sei gegeben. Dann sind die a_i^j Einträge einer Matrix – die Transformationsmatrix der kovarianten Basisvektoren. In der Gleichung $\vec{\hat{g}}_i = a_i^j \cdot \vec{g}_j$, in der i ein freier Index ist, sind die a_i^j für jede Wahl von i die kontravarianten Komponenten der neuen Basisvektoren $\vec{\hat{g}}_i$ bezogen auf die alte Basis \vec{g}_j . Entsprechendes gilt für kontravariante Basisvektoren: $\vec{\hat{g}}^k = b_l^k \cdot \vec{g}^l$. b_l^k ist die dabei die Transformationsmatrix der kontravarianten Basisvektoren, mit der man aus den alten Basisvektoren \vec{g}^l die neuen Basisvektoren $\vec{\hat{g}}^k$ berechnen kann.

$$\vec{\hat{g}}_i = a_i^j \cdot \vec{g}_j$$

$$\vec{\hat{g}}^k = b_l^k \cdot \vec{g}^l$$

Multipliziert man skalar die linken und rechten Seiten der beiden Gleichungen so erhält man:

$$\vec{\hat{g}}_i \cdot \vec{\hat{g}}^k = a_i^j \cdot b_l^k \cdot \vec{g}_j \cdot \vec{g}^l, \text{ also } \delta_i^k = a_i^j \cdot b_l^k \delta_j^l \text{ mit dem Austausch der Indizes R1: } \delta_i^k = a_i^j \cdot b_j^k. \text{ Auf der rechten Seite steht das Produkt der beiden Matrizen } a_i^j \text{ und } b_j^k.$$

Also sind die beiden Matrizen a_i^j und b_j^k invers zueinander. Damit erhält man das Ergebnis: **Die kovarianten Basis transformiert sich mit der inversen Matrix der kontravarianten Basis und umgekehrt.**

Das Transformationsverhalten der kontravarianten Koordinaten erhält man, wenn man einen kovarianten Vektor \vec{X} bezüglich der Ausgangsbasis und der transformierten Basis darstellt. Man erhält die Gleichung:

$$\vec{X} = \hat{a}^i \vec{\hat{g}}_i = a^i \vec{g}_i \text{ bzw. } \hat{a}^i \vec{\hat{g}}_i = a^i \vec{g}_i.$$

Diese Gleichung wird mit $\vec{\hat{g}}^k$ skalar multipliziert. Damit erhält man folgende Umformungen:

$$\hat{a}^i \cdot \vec{\hat{g}}_i \cdot \vec{\hat{g}}^k = a^i \cdot \vec{g}_i \cdot \vec{\hat{g}}^k, \hat{a}^i \delta_i^k = a^i \cdot \vec{g}_i \cdot b_l^k \vec{g}^l, \hat{a}^k = a^i \cdot b_l^k \vec{g}_i \vec{g}^l, \hat{a}^k = a^i \cdot b_l^k \delta_i^l.$$

Mit Indexaustausch ergibt dies schließlich $\hat{a}^k = a^i \cdot b_i^k$. Das Ergebnis zeigt also, dass sich die

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

kontravarianten Komponenten eines kovarianten Vektors genauso transformieren wie die entsprechenden kontravarianten Basen. Umgekehrt erhält man ebenso die Transformation der kovarianten Komponenten eines kontravarianten Vektors in zwei unterschiedlichen kontravarianten Basen. Die kovarianten Komponenten eines kontravarianten Vektors transformieren sich genauso wie die entsprechenden kontravarianten Basen.

Die beiden Matrizen a_i^j und b_j^k invers zueinander: $(b_i^j) = (a_i^j)^{-1}$.

| Ergebnis | Transformation der Basis | Transformation der Komponenten | |
|----------------------|---|--------------------------------|-----------------------------------|
| kovariant | $\vec{\hat{g}}_i = a_i^j \cdot \vec{g}_j$ | $\hat{a}^k = a^i \cdot b_i^k$ | Kontravariante Komponenten |
| kontravariant | $\vec{\hat{g}}^k = b_l^k \cdot \vec{g}^l$ | $\hat{a}_i = a_j \cdot a_i^j$ | Kovariante Komponenten |

In der Linearen Algebra betrachtet man lineare Abbildungen $\Phi: V \rightarrow V$. Sie haben die Eigenschaft, einen Vektor $\vec{v} = a^i b_i$ wie folgt abzubilden: $\Phi(\vec{v}) = \Phi(a^i b_i) = a^i \Phi(b_i)$ (einsteinsche Summenkonvention). Der abgebildete Vektor ist i. A. nicht mit dem Ausgangsvektor identisch. Ist die Abbildung Φ eineindeutig, dann bilden die Vektoren $\{\Phi(b_i)\}$ eine neue Vektorraumbasis. Die lineare Abbildung Φ kann man auch als Transformationsabbildung zwischen den beiden Vektorraumbasen $\{b_i\}$ und $\{\Phi(b_i)\}$ betrachten. Will man denselben Vektor \vec{v} bezüglich der neuen Basis $\{\Phi(b_i)\}$ darstellen, so muss man die Komponenten a^i des Vektors \vec{v} mit der inversen Abbildung abbilden. Denn dann gilt: $(a^i) \Phi^{-1} \circ \Phi(b_i) = a^i \cdot b_i = \vec{v}$. Die neuen Komponenten des Vektors \vec{v} bezüglich der neuen Basis $\{\Phi(b_i)\}$ sind also $(a^i) \Phi^{-1}$. Ich habe das Argument der Komponenten links von der Abbildung geschrieben, damit man die Beziehung zwischen der Transformation der Vektorraumbasen und der Transformation der Komponenten besser erkennt. Bei kontravarianten Vektorraumbasen haben wir schon gezeigt, dass Φ^{-1} die Transformationsabbildung der Vektorraumbasen ist. Dann müssen sich die kovarianten Komponenten mit Φ transformieren, damit ein kontravarianter Vektor in beiden Basisdarstellungen derselbe ist.

Beispiel 1: Vektor

Dadurch, dass das Transformationsverhalten von Basisvektoren und Komponenten gegenläufig ist, ändert sich die vektorielle Größe \vec{A} nicht bei der Transformation von einer in eine andere Basis. Die Rechnung dazu lautet:

Sei $\vec{A} = A^i \cdot \vec{g}_i$ die Darstellung von \vec{A} in der Basis \vec{g}_i und $\vec{A} = \hat{A}^i \cdot \vec{\hat{g}}_i$ sei die Darstellung desselben Vektors in der Basis $\vec{\hat{g}}_i$. Dann gilt folgende Gleichungskette:

$$\vec{A} = \hat{A}^i \cdot \vec{\hat{g}}_i = A^k \cdot b_k^i \cdot a_i^j \vec{g}_j = A^k \delta_k^j \cdot \vec{g}_j = A^j \cdot \vec{g}_j = \vec{A}.$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Hier gilt die einsteinsche Summenkonvention, sodass die Gleichheit auch folgt, weil es dann keine Rolle spielt, ob man über den Index i in $\hat{A}^i \cdot \vec{\hat{g}}_i$ oder den Index j in $A^j \cdot \vec{\hat{g}}_j$ summiert.

Beispiel 2: Metriktenor

Berechnet man mit dem Metriktenor das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} bezüglich einer Basis \vec{g}_i , dann erhält man: $\vec{a} \cdot \vec{b} = g_{ij} \cdot a^i \cdot b^j = a_j \cdot b^j$. Führt man anschließend eine Basistransformation aus, so ergibt das: $\vec{\hat{a}} \cdot \vec{\hat{b}} = \hat{a}_j \cdot \hat{b}^j$. Aber beide Größen \hat{a}_j und \hat{b}^j transformieren sich mit inversen Transformationsmatrizen. Deshalb ändert sich das Skalarprodukt nicht.

1.5 Zusammenfassung

Man bestimmt zuerst die Transformationsmatrix T zwischen zwei kovarianten Vektorraumbasen B_1 und B_2 .

Man berechnet die **kovarianten** Metriktensoren g^1_{ij} und g^2_{ij} bezüglich der kovarianten Vektorraumbasen B_1 und B_2 .

Man berechnet die **inverse** Matrix T^{-1} der Transformationsmatrix T zwischen den beiden kovarianten Vektorraumbasen B_1 und B_2 .

Man berechnet die inverse Matrizen g_1^{ij} und g_2^{ij} zu den kovarianten Metriktensoren g^1_{ij} und g^2_{ij} .

Die **inverse** Matrix T^{-1} ist dann die Transformationsmatrix der kontravarianten Komponenten eines Vektors bezüglich der kovarianten Vektorraumbasen B_1 und B_2 .

Die **inverse** Matrix T^{-1} ist aber auch die Transformationsmatrix der kontravarianten Vektorraumbasen B^1 und B^2 .

Die **inversen** Matrizen g_1^{ij} und g_2^{ij} sind dann die Metriktensoren der kontravarianten Vektorraumbasen B^1 und B^2 .

Mit der Matrix g_1^{ij} kann man die kovariante Vektorraumbasis B_1 in die kontravariante Vektorraumbasis B^1 umrechnen.

Mit der Matrix g^1_{ij} kann man die kontravariante Vektorraumbasis B^1 in die kovariante Vektorraumbasis B_1 umrechnen.

Entsprechendes gilt für g_2^{ij} und g^2_{ij} .

Mit der Matrix g_1^{ij} kann man die kovarianten Komponenten eines Vektors in der Vektorraumbasis B^1 in die kontravarianten Komponenten des Vektors in der kovarianten Basis B_1 umrechnen.

Mit der Matrix g^1_{ij} kann man die kontravarianten Komponenten eines Vektors in der kovarianten Vektorraumbasis B_1 in die kovarianten Komponenten des Vektors in der kontravarianten Vektorraumbasis B^1 umrechnen.

Entsprechendes gilt für g_2^{ij} und g^2_{ij} .

1.6 Rechenbeispiel

| Rechnung | Bedeutung |
|---|---|
| $B_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ | 1. Vektorraumbasis: Orthonormalbasis |
| $\vec{g}_1 = \vec{e}_1$ $\vec{g}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ $\vec{g}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ | 2. Vektorraumbasis |
| $T(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | Basistransformationsmatrix |
| $T^{-1}(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | Inverse Matrix zur Basistransformationsmatrix |
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | Metriktensor zur 1. Basis |
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | Inverser Metriktensor zur 1. Basis |
| $g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j : g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | Metriktensor zur 2. Vektorraumbasis |
| $g^{ij} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ | Inverser Metriktensor zur 2. Vektorraumbasis |
| $\vec{F} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 - 5 \cdot \vec{e}_3$ | Vektor \vec{F} bezüglich der 1. Vektorraumbasis |
| $\vec{S} = 2 \cdot \vec{e}_1 - 3 \cdot \vec{e}_2 - 5 \cdot \vec{e}_3$ | Vektor \vec{S} bezüglich der 1. Vektorraumbasis |
| $\vec{F} = -\vec{g}_1 + 8 \cdot \vec{g}_2 - 5 \cdot \vec{g}_3$ | Vektor \vec{F} bezüglich der 2. Vektorraumbasis |
| $\vec{S} = 5 \cdot \vec{g}_1 - 3 \cdot \vec{g}_3$ | Vektor \vec{S} bezüglich der 2. Vektorraumbasis |
| $\vec{F} \cdot \vec{S} = \delta^j_i \cdot f^i \cdot s^j : \vec{F} \cdot \vec{S} = 10$ | Skalarprodukt in der 1. Vektorraumbasis |
| $\vec{F} \cdot \vec{S} = g_{ij} \cdot f^i \cdot s^j : \vec{F} \cdot \vec{S} = 10$ | Skalarprodukt in der 2. Vektorraumbasis |

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

| <i>Rechnung</i> | <i>Bedeutung</i> |
|--|--|
| $\{\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ | Kontravariante Basis zur 1. Vektorraumbasis |
| $\vec{g}^1 = 2 \cdot \vec{g}_1 - \vec{g}_2$ $\vec{g}^2 = -\vec{g}_1 + 2 \vec{g}_2 - \vec{g}_3$ $\vec{g}^3 = -\vec{g}_2 + \vec{g}_3$ $\vec{g}^1 = \vec{e}^1 - \vec{e}^2$ $\vec{g}^2 = \vec{e}^2 - \vec{e}^3$ $\vec{g}^3 = \vec{e}^3$ | Kontravariante Basis zur 2. Vektorraumbasis |
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ | Kontravariante Transformationsmatrix |
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | Inverse kontravariante Transformationsmatrix |

1.7 Die Tensoralgebra

Tensoren 1. Stufe beschreiben das Transformationsverhalten von kovarianten oder kontravarianten Komponenten eines Vektors oder eines anderen Objektes. Wir bezeichnen die Transformationsmatrix der kovarianten Komponenten mit $\underline{a_i}^j$ und die Transformationsmatrix kontravarianter Komponenten mit $\overline{a_j}^i$. Dann gilt:

$$\tilde{A}_i = \underline{a_i}^j A_j$$

$$\tilde{A}^j = \overline{a_j}^i A^i$$

Die beiden Transformationsmatrizen $\underline{a_i}^j$ und $\overline{a_j}^i$ sind nach 1.5 invers zueinander.

Der Metriktensor $g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$ ist ein kovarianter Tensor 2. Stufe. Ebenso ist der Metriktensor $g^{ij} = \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j$ ein kontravarianter Tensor 2. Stufe.

Gilt $\tilde{\vec{g}}_i = \underline{a_i}^l \vec{g}_l$ und $\tilde{\vec{g}}_j = \underline{a_j}^m \vec{g}_m$ dann erhält man $\tilde{g}_{ij} = \tilde{\vec{g}}_i \cdot \tilde{\vec{g}}_j = \underline{a_i}^l \vec{g}_l \cdot \underline{a_j}^m \vec{g}_m$ und damit $\tilde{g}_{ij} = \underline{a_i}^l \cdot \underline{a_j}^m \cdot \vec{g}_l \cdot \vec{g}_m = \underline{a_i}^l \cdot \underline{a_j}^m \cdot g_{lm}$. Das Transformationsverhalten des kovarianten Metriktensors ist also kovariant.

Eine lineare Abbildung $\Phi: V \rightarrow V$ eines n -dimensionalen Vektorraums V ist ein gemischter Tensor 2. Stufe. Dies hatten wir schon bei den Transformationsmatrizen $\underline{a_i}^j$ und $\overline{a_j}^i$ gesehen.

Man kann Tensoren gleicher Art addieren und **beliebige Tensoren** multiplizieren. Einige Tensoren sind symmetrisch oder antisymmetrisch. Der Metriktensor ist z. B. symmetrisch. Ist ein Tensor symmetrisch gegenüber beliebiger Vertauschungen der Indizes, dann nennt man ihn vollständig symmetrisch. Ein Metriktensor 2. Stufe ist also immer vollständig symmetrisch. Die Symmetrie schränkt die Unabhängigkeit der Komponenten ein. Bei einem symmetrischen Tensor 2. Stufe und einer Vektorraumdimension von 3 hat ein symmetrischer Tensor 2. Stufe genau 6 unabhängig wählbarer Komponenten. Antisymmetrisch ist ein Tensor, wenn bei einer Vertauschung beliebiger Indexpaare die negative Komponente herauskommt. Bei zwei Indizes heißt das: $a_{ij} = -a_{ji}$. Dann steht in der Matrix, die den Tensor repräsentiert in der Hauptdiagonalen 0, weil aus $a_{ii} = -a_{ii}$ folgt, dass $a_{ii} = 0$ ist.

Vorläufige Definition eines Tensors:

Ein Tensor der Stufe p wird durch Komponenten beschrieben, die p -fach indiziert sind. Ist $p = r+s$, dann können von den p Komponenten r kovariant und s kontravariant sein.

Mathematische Definition eines Tensors:

Anmerkung zur Definition: In 1.2 hatten wir schon den dualen Vektorraum $V^* = L(V, \mathbb{R})$ angegeben.

Definition:⁸

Eine **k -Multilinearform** ω ist in der Mathematik eine Funktion, die k Argumenten $v_i \in V_i, i \in \{1, \dots, k\}$ aus K -Vektorräumen V_1, \dots, V_k einen Wert $\omega(v_1, \dots, v_k)$ in K zuordnet und in jeder Komponente linear ist. Die Menge aller k -Multilinearformen ist ebenfalls ein Vektorraum und wird mit $L^k(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k; K)$ bezeichnet. Er wird mit dem **Tensorprodukt**

$V_1^* \otimes \dots \otimes V_k^*$ identifiziert. Setzt man nun für einen Vektorraum V mit Dualraum V^* $T_s^r(V, K) = L^{r+s}(V^* \times \dots \times V^*, V \times \dots \times V; K)$ mit r Einträgen von V^* und s Einträgen von V , so kann man diesen Vektorraum mit dem Tensorprodukt

$T_s^r(V) = V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$ identifizieren: mit r Faktoren E und s Faktoren E^* .

Elemente dieser Menge heißen **Tensoren**, kontravariant der Stufe r und kovariant der Stufe s . Man spricht von Tensoren vom Typ (r, s) . Die Summe $r+s$ heißt Stufe oder Rang des Tensors.

8 Siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Tensor>

1.8 Basis des Tensorproduktes

Die Basis von $T_s^r(V) = V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$ kann über die Basis $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$ und die Basis $\{\vec{g}^1, \dots, \vec{g}^n\}$ wie folgt angegeben werden:

$$\left\{ \vec{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{g}_{i_r} \otimes \vec{g}^{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{g}^{j_s} \mid i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s = 1 \dots n \right\} \text{ oder}$$

$$x \in T_s^r(V) = \sum_{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s} a_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \vec{g}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{g}_{i_r} \otimes \vec{g}^{j_1} \otimes \dots \otimes \vec{g}^{j_s}$$

1.9 Lineare Abbildungen als Tensorprodukt

Eine lineare Abbildung $\Phi: V \rightarrow V$ eines n -dimensionalen Vektorraums V mit Basis $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$, dann gilt für jeden Basisvektor \vec{g}_i :

$$\Phi(\vec{g}_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} \vec{g}_j \text{ für } i=1, \dots, n.$$

Also:

$$\vec{g}^k(\Phi(\vec{g}_i)) = a_{ki} = a_k^i \cdot \vec{g}^k \otimes \vec{g}_i.$$

Die Matrix, die die lineare Abbildung $\Phi: V \rightarrow V$ beschreibt, kann also als Tensor $a_k^i \cdot \vec{g}^k \otimes \vec{g}_i$ geschrieben werden und ist somit ein Element des Tensorprodukts $V^* \otimes V$.

1.10 Bilinearform

Ist V ein endlich dimensionaler Vektorraum über K mit Basis $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$, dann bezeichnet man eine lineare Abbildung von $\Phi: V \times V \rightarrow K$ als **Bilinearform**, wenn sie in jeder Komponente linear ist. Daraus folgt:

$$\omega(v, w) = \omega\left(\sum_{k=1}^n a_k \cdot \vec{g}_k, \sum_{j=1}^n b_j \cdot \vec{g}_j\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \cdot b_j \cdot \omega(\vec{g}_k, \vec{g}_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n g_{kj} \cdot \omega(\vec{g}_k, \vec{g}_j) \quad .$$

Die Bilinearformen bilden einen Vektorraum, den man mit $L(V \times V; K)$ bezeichnet. Aus der Basis $\{\vec{g}^i, \dots, \vec{g}^n\}$ von V^* kann man dann die Basis von $L(V \times V; K)$ wie folgt angeben:

$$[\vec{g}^i, \vec{g}^j](\vec{g}_k, \vec{g}_l) := \begin{cases} 1 & \text{für } i=k \text{ und } j=l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Man nennt diesen Vektorraum auch das **Tensorprodukt** $V^* \otimes V^*$ und schreibt für die Basisvektoren $[\vec{g}^i, \vec{g}^j] = \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j$. Dann entspricht jeder Bilinearform ω von oben eineindeutig ein Vektor im Tensorprodukt $V^* \otimes V^*$. Hat man $g_{ij} = \omega(\vec{g}_i, \vec{g}_j)$, dann ist der Vektor im Tensorprodukt, der der bilinearen Abbildung ω entspricht, durch folgenden Ausdruck:

$$\omega = \sum_{i,j} g_{ij} \cdot \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j \in T_2(V)$$

gegeben.

Die Koeffizienten $g_{ij} = \omega(\vec{g}_i, \vec{g}_j)$ sind ebenfalls die Einträge einer Matrix, die die Bilinearform wie folgt beschreibt:

$$\omega(\vec{a}, \vec{b}) = (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{k1} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{kn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & g_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b^1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b^n \end{pmatrix} \quad .$$

Hat die Bilinearform ω folgende Eigenschaften:

1. Symmetrisch: $\omega(\vec{x}, \vec{y}) = \omega(\vec{y}, \vec{x})$
2. Positiv definit: $\omega(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ und $\omega(\vec{x}, \vec{x}) = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = 0$,

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

so ist die Bilinearform ein **Skalarprodukt**. Hat man ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum V , so kann man Längen von Vektoren und Winkel zwischen Vektoren definieren:

$$L = \sqrt{\omega(\vec{x}, \vec{x})}$$

$$\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{\omega(\vec{x}, \vec{y})}{\sqrt{\omega(\vec{x}, \vec{x})} \cdot \sqrt{\omega(\vec{y}, \vec{y})}} .$$

Repräsentieren die Vektoren die Ortsvektoren bezüglich eines Koordinatensystems S mit Basis $\{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_n\}$, so kann man ebenfalls einen Abstand zwischen den zwei Punkten A und B definieren, die durch die Ortsvektoren \vec{A} und \vec{B} repräsentiert werden:

$d(\vec{A}, \vec{B}) = \sqrt{\omega(\vec{x}, \vec{x})}$, mit $\vec{x} = \vec{B} - \vec{A}$. Damit wird der Vektorraum V zu einem metrischen Raum.

Damit man sofort sieht, dass es sich bei der Bilinearform um ein Skalarprodukt handelt, schreibt man: $\omega(\vec{x}, \vec{y}) = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ oder einfach: $\omega(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$.

Die Matrix von oben lautet dann mit:

$$\omega(\vec{g}_i, \vec{g}_j) = \langle \vec{g}_i, \vec{g}_j \rangle = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = g_{ij} :$$

Achtung: Das Skalarprodukt der Raumzeit ist nicht positiv definit. Man bezeichnet dies als Pseudometrik. Ich werde aber keinen Unterschied zwischen den beiden Metriken machen.

1.11 Tensorverjüngung

Eine Tensorverjüngung ist eine Abbildung $D_k^l: T_s^r(V) \rightarrow T_{s-1}^{r-1}(V)$ mit der Eigenschaft auf den Basisvektoren:

$$D_k^l(\vec{g}_1 \otimes \dots \otimes \vec{g}_k \otimes \dots \otimes \vec{g}_r \otimes \vec{g}^1 \otimes \dots \otimes \vec{g}^l \otimes \dots \otimes \vec{g}^s) = \dots \dots \dots$$

$$\vec{g}^l(\vec{g}_k) \cdot \vec{g}_1 \otimes \dots \otimes \vec{g}_{k-1} \otimes \vec{g}_{k+1} \otimes \dots \otimes \vec{g}_r \otimes \vec{g}^1 \otimes \dots \otimes \vec{g}^{l-1} \otimes \vec{g}^{l+1} \otimes \dots \otimes \vec{g}^s$$

, wobei die $\vec{g}^l(\vec{g}_k) = \delta_k^l$ nur den Beitrag 1 für $k=l$ liefern.

Lineare und multilineare Abbildungen werden in der Mathematik oft dadurch beschrieben, welche Vektoren die Abbildungen den Basisvektoren zuordnet. Wendet man die Tensorverjüngung auf den Tensor der linearen Abbildung $\Phi: V \rightarrow V$ an, so erhält man:

$$D_1^1: T_1^1(V) \rightarrow T_0^0(V) = \mathbb{R} \text{ mit}$$

$$D_1^1(a_k^i \cdot \vec{g}^k \otimes \vec{g}_i) = a_k^i \cdot \vec{g}^k(\vec{g}_i) = a_i^i.$$

Es handelt sich hierbei um die Spur der Matrix oder der linearen Abbildung, die durch die Matrix gegeben ist.

Der Ausdruck $D_2^1: T_3^1(V) \rightarrow T_2^0(V)$ ergibt:

$$D_2^1(a_{jkl}^i \cdot \vec{g}_i \otimes \vec{g}^j \otimes \vec{g}^k \otimes \vec{g}^l) = a_{jkl}^i \cdot \vec{g}^k(\vec{g}_i) \cdot \vec{g}^j \otimes \vec{g}^l$$

$$D_2^1(a_{jkl}^i \cdot \vec{g}_i \otimes \vec{g}^j \otimes \vec{g}^k \otimes \vec{g}^l) = a_{jl} \cdot \vec{g}^j \otimes \vec{g}^l : a_{jl} = a_{jil}^i$$

Zusammenfassung:

Wie die Beispiele zeigen, ist ein Tensor eindeutig durch die Angabe der Komponenten festgelegt. Dazu ist es wichtig, dass die Indizes der Komponenten eine gewisse Anordnung haben. So ist z. B. der Index a_{ij}^k etwas anderes als a_{ij}^k . Die erste Komponente gehört zum Basisvektor $\vec{g}^i \otimes \vec{g}^j \otimes \vec{g}_k$ und die zweite Komponente zum Basisvektor $\vec{g}_k \otimes \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j$. Bei der Definition der Tensoren hat man dieses Problem umgangen, weil die Vektorräume und die korrespondierenden dualen Vektorräume entsprechend angeordnet wurden. Wichtig ist, dass bei der gewählten Schreibweise der Komponenten die entsprechenden Basisvektoren im Tensorprodukt nicht mehr anzugeben sind, weil dies durch die Schreibweise schon festgelegt ist. Deshalb verzichtet man in der Tensorrechnung darauf. Damit ist man wieder bei der vorläufigen Definition angelangt, der die mathematische Definition zugrunde liegt.

In der jetzigen Version des Skriptes hat man drei Regeln der Tensorrechnung benutzt, die hier noch einmal zusammengefasst sind:

R1: Austausch der Indizes: $X^j \cdot \delta_j^k = X^k$ mit dem Summationsindex j und den freien Index k .

Analog dazu hat man im dualen Fall: $X_j \cdot \delta_k^j = X_k$.

R2: Tensorverjüngung: Indem man einen kovarianten und kontravarianten Index gleichsetzt, erhält man einen Tensor zwei Stufen weniger: $a_i^i{}_{kl} = a_{kl}$.

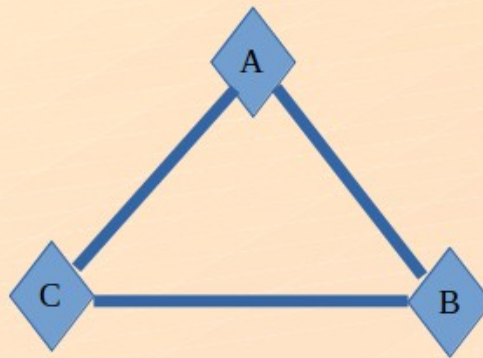
R3: Indexshift mittels Metriktensor: $a^i = g^{ij} \cdot a_j$ oder $a_i = g_{ij} \cdot a^j$.

1.12 Pseudotensor: Der kovariante Epsilon-Tensor im dreidimensionalen Raum

Der Vektorraum V sei dreidimensional. Dann kann man folgende indizierte Größe definieren;

$$\epsilon_{ijk} = \sqrt{g} \cdot \epsilon(i, j, k)$$

Dabei ist g die positive Wurzel aus der Determinante des kovarianten Metrik-Tensors. Der zweite Faktor ist das Vorzeichen der Permutation von $\{1; 2; 3\}$. Ist die Permutation gerade, dann ist das Vorzeichen positiv und sonst negativ. Gerade und ungerade Permutation von drei Dingen kann man sich wie folgt verdeutlichen:



Wird von irgendeinem Punkt das Dreieck im Uhrzeigersinn durchlaufen, so erhält man eine gerade Permutation. (B; C; A) ist eine gerade Permutation. Wird das Dreieck von irgend einem Punkt gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, so erhält man eine ungerade Permutation. (A; C; B) ist eine ungerade Permutation.

Sind zwei Indizes der i, j, k gleich, dann ist $\epsilon(i, j, k)$ gleich 0. Damit ist der Epsilon-Tensor eindeutig definiert, wenn das Transformationsverhalten stimmt. Der kontravariante Epsilon-Tensor ergibt sich dann zu

$$\epsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \epsilon(i, j, k)$$

Wegen der Definition der $\epsilon(i, j, k)$ hat der Epsilon-Tensor genau 6 von 0 verschiedenen Komponenten. Der Metrik-Tensor transformiert sich $\bar{g}_{ij} = \underline{a}_i^k \underline{a}_j^l g_{kl}$ mit der entsprechenden Transformationsmatrix \underline{a}_i^k . Nach dem Produktsatz für Determinanten gilt:

$$\det(\bar{g}_{ij}) = \det(\underline{a}_i^k) \cdot \det(\underline{a}_j^l) \cdot \det(g_{kl}) = \det(\underline{a}_i^k)^2 \cdot \det(g_{kl}) \quad \text{bzw.}$$

$$\bar{g} = \det(\underline{a}_i^k)^2 \cdot g \quad \text{bzw.}$$

$$\sqrt{\bar{g}} = |\det(\underline{a}_i^k)| \cdot \sqrt{g}$$

Der Betrag einer Zahl ist das Produkt der Zahl mit dem Vorzeichen der Zahl:

$$\sqrt{\bar{g}} = \text{sign}(\det(\underline{a}_i^k)) \cdot \det(\underline{a}_i^k) \cdot \sqrt{g}$$

Die Determinante der Transformationsmatrix ist ungleich 0, weil die Transformationsmatrix eine inverse Matrix hat. Als Beispiel soll $\bar{\epsilon}_{123}$ berechnet werden, um das Ergebnis im nächsten Schritt zu verallgemeinern.

$$\bar{\epsilon}_{123} = \sqrt{\bar{g}} = \text{sign}(\det(\underline{a}_i^k)) \cdot \det(\underline{a}_i^k) \cdot \sqrt{g} = \text{sign}(\det(\underline{a}_i^k)) \cdot \sqrt{g} \cdot \underline{a}_1^l \cdot \underline{a}_2^m \cdot \underline{a}_3^n \cdot \epsilon(l, m, n)$$

, wobei über l, m, n summiert wird. Die Summe hat keinen Summanden, in denen zwei Indizes gleich sind, weil dann $\epsilon(l, m, n) = 0$ ist. Es kommen nur die Permutationen von $\{1; 2; 3\}$ vor. Damit erhält man:

$$\bar{\epsilon}_{123} = \sqrt{\bar{g}} = \text{sign}(\det(\underline{a}_i^k)) \cdot \underline{a}_1^l \cdot \underline{a}_2^m \cdot \underline{a}_3^n \cdot \epsilon_{123} \quad .$$

Allgemein also: $\bar{\epsilon}_{ijk} = \sqrt{\bar{g}} = \text{sign}(\det(\underline{a}_i^k)) \cdot \underline{a}_i^l \cdot \underline{a}_j^m \cdot \underline{a}_k^n \cdot \epsilon_{ijk}$. Das ist bis auf ein Vorzeichen das Transformationsverhalten eines kovarianten Tensors 3. Stufe. Einen Tensor, der sich bis auf ein Vorzeichen wie ein Tensor transformiert, nennt man Pseudotensor. Bei einer Determinante größer 0 ist das Transformationsverhalten wie ein Tensor. Bei einer Determinanten kleiner 0 ist das Verhalten nicht wie ein Tensor, weil die Transformationsdeterminante ein negatives Vorzeichen hat. Transformationen, bei denen die Determinante negativ ist, sind Raumspiegelungen.

Ist A^i ein kovarianter Pseudotensor 1. Stufe, dann transformiert er sich laut Definition mit:

$$\bar{A}_i = \text{sign}(\det(\underline{a}_i^j)) \underline{a}_i^j A_j$$

Betrachtet man die Spiegelungstransformation $\underline{a}_i^j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ mit

$\det(\underline{a}_i^j) = -1$ so erhält man die Raumspiegelung, die die Richtungen der Basisvektoren umkehrt. Die Komponenten eines kovarianten Vektors ändern sich dann durch die Transformation nicht. Der Vektor wird dadurch bei einer Raumspiegelung ebenfalls seine Richtung umkehren. Bei einem richtigen Tensor würde nach der Transformation der Vektor sich nicht ändern. Physikalisches Beispiel dafür ist der Winkelgeschwindigkeitsvektor. Er ist parallel zur Drehachse und heißt deshalb auch **Axialvektor**. Er ändert seine Richtung, wenn man eine Basistransformation derart durchführt,

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

*dass es sich um eine Raumspiegelung handelt. **Polare Vektoren** wie z. B. Ortsvektoren oder Geschwindigkeitsvektoren sind normale Vektoren, die ihre Orientierung bei einer Transformation nicht verändern.*

1.13 Das Vektorprodukt

Über den Epsilontensor kann man das **vektorielle Produkt** zweier Vektoren in einem dreidimensionalen Vektorraum wie folgt definieren:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} \cdot a^j \cdot b^k .$$

Dabei ist $(\vec{a} \times \vec{b})_i$ die i -te kovariante Komponente des Produktvektors. Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} werden bezüglich einer kovarianten Basis mit kontravarianten Komponenten dargestellt. Der Vorteil dieser Definition ist, dass sie sich auf beliebige Vektorraumbasen bezieht und nicht nur auf eine orthonormierte Basis. Im anderen Fall ergibt sich:

$$(\vec{a} \times \vec{b})^i = \epsilon^{ijk} \cdot a_j \cdot b_k .$$

Sind beide Vektoren im Vektorprodukt polar, so ist das vektorielle Produkt beider Vektoren ein axialer Vektor. Ein Beispiel dafür ist der Drehimpulsvektor $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$. Ist dagegen einer der beiden Vektoren ein axialer Vektor und der andere ein polarer Vektor, dann ist das vektorielle Produkt ein polarer Vektor. Ein Beispiel dafür ist der Geschwindigkeitsvektor einer Kreisbewegung $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Hat man eine **Orthonormalbasis**, dann ist g – die Determinante des Metrikensors – gleich 1. Der Epsilontensor ist also: $\epsilon_{ijk} = \epsilon(i, j, k)$ oder $\epsilon^{ijk} = \epsilon(i, j, k)$. Damit ergibt sich für das vektorielle Produkt:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_i &= a^j \cdot b^k \cdot \epsilon(i, j, k) \\ (\vec{a} \times \vec{b})_1 &= a^2 \cdot b^3 - a^3 \cdot b^2 \\ (\vec{a} \times \vec{b})_2 &= a^3 \cdot b^1 - a^1 \cdot b^3 \\ (\vec{a} \times \vec{b})_3 &= a^1 \cdot b^2 - a^2 \cdot b^1 \end{aligned} .$$

Bezüglich jeglicher Basis kann man das Skalarprodukt des Vektors $(\vec{a} \times \vec{b})$ mit \vec{a} und \vec{b} berechnen. Man erhält dann:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = a^i \cdot \epsilon_{ijk} \cdot a^j \cdot b^k .$$

Wenn man k nicht verändert, hat man zwei Summanden, in denen man b^k ausklammern kann: $(a^i \cdot a^j - a^j \cdot a^i) \cdot b^k$. Da das Skalarprodukt symmetrisch ist, gilt aber $a^i \cdot a^j = a^j \cdot a^i$ und damit verschwinden alle Summanden im Skalarprodukt. Das liefert:

$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 , \text{ also } \vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b}) .$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Dasselbe gilt für \vec{b} : $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$, also $\vec{b} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$.

Das vektorielle Produkt steht senkrecht auf beiden Faktoren.

Allgemein gilt, wenn A^{ij} ein antisymmetrischer Tensor ist und S_{ij} ein symmetrischer Tensor ist, dann ist $A^{ij} \cdot S_{ij}$ mit der einsteinschen Summenkonvention 0.

Für die Länge von $\vec{a} \times \vec{b}$ erhält man:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

, wobei α der eingeschlossene Winkel zwischen den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist.

Herleitung:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (\vec{a} \times \vec{b})_i \cdot (\vec{a} \times \vec{b})^i & \epsilon_{ijk} \cdot \epsilon^{ilm} &= \delta_j^l \cdot \delta_k^m - \delta_j^m \cdot \delta_k^l \Rightarrow \\ |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= \epsilon_{ijk} a_j \cdot b_k \epsilon^{ilm} a^l \cdot b^m & |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= (\delta_j^l \cdot \delta_k^m - \delta_j^m \cdot \delta_k^l) a^l \cdot b^m \cdot a_j \cdot b_k \Rightarrow \\ |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= \epsilon_{ijk} \cdot \epsilon^{ilm} a_j \cdot b_k \cdot a^l \cdot b^m & |(\vec{a} \times \vec{b})|^2 &= a^l \cdot b^m \cdot a_l \cdot b_m - a^l b^m a_m b_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(\vec{a} \times \vec{b})|^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \Rightarrow \\ |(\vec{a} \times \vec{b})|^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) \Rightarrow \\ |(\vec{a} \times \vec{b})|^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Beispiele:

$\vec{F} = \vec{E} + q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$. Mit der elektrischen Feldstärke \vec{E} und der magnetischen Flussdichte \vec{B} und der Lorentzkraft \vec{F} . Dabei sind \vec{E} , \vec{F} und \vec{v} polare Vektoren. Also muss die magnetische Flussdichte ein axialer Vektor sein.

Das Vektorprodukt ist anti kommutativ.

$$\begin{aligned}(\vec{b} \times \vec{a})_i &= \epsilon_{ijk} b^j a^k \\(\vec{b} \times \vec{a})_i &= \epsilon_{ijk} a^k b^j \\(\vec{b} \times \vec{a})_i &= -\epsilon_{ikj} a^k b^j \\(\vec{b} \times \vec{a})_i &= -(\vec{a} \times \vec{b})_i\end{aligned}$$

Weitere Vektorprodukte:

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \times \vec{b})_i \cdot (\vec{c} \times \vec{d})^i \\(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \epsilon_{ijk} a^j b^k \cdot \epsilon^{ilm} c_l d_m \\(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= \epsilon_{ijk} \epsilon^{ilm} a^j b^k \cdot c_l d_m \\(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\delta_j^l \cdot \delta_k^m - \delta_j^m \cdot \delta_k^l) a^j b^k \cdot c_l d_m \\(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= a^l b^m c_l d_m \\(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d}) \\(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\vec{a} \times \vec{b})_i \cdot (\vec{c})^i = \epsilon_{ijk} a^j b^k \cdot \epsilon^{ilm} c_l \\(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \epsilon_{ijk} \epsilon^{ilm} a^j b^k \cdot c_l \\(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\delta_j^l \cdot \delta_k^m - \delta_j^m \cdot \delta_k^l) a^j b^k \cdot c_l \\(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (a^l b^m - a^m b^l) c_l \\(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})\end{aligned}$$

Kapitel II: Differenzialrechnung und Integralrechnung

2.1 Vektorfelder

Als Beispiel dient ein Geschwindigkeitsfeld in einer Strömung. Der Geschwindigkeitsvektor ändert sich mit dem Ort. Das Koordinatensystem, das bei den Überlegungen zugrunde liegt, soll immer durch eine orthonormale Vektorraumbasis gegeben sein. Das bedeutet auch, dass sich das Koordinatensystem nicht ändert, wenn man den Geschwindigkeitsvektor an einem bestimmten Ort betrachtet. Der Geschwindigkeitsvektor bezieht sich immer auf dasselbe Koordinatensystem. Das Koordinatensystem hängt nicht vom Ort ab. Der Geschwindigkeitsvektor beschreibt ein Vektorfeld $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$. Ein anderes Beispiel ist die Feldstärke im elektrischen Feld.

Ein skalares Feld ist ein ortsabhängiger Skalar. Zum Beispiel die Temperatur oder der Luftdruck. Dort, wo der Skalar konstant ist, erhält man die Niveaulächen. $\lambda = \lambda(\vec{r})$.

Das **Wegintegral** über ein Vektorfeld ist wie folgt definiert: $\int_c \vec{V} \cdot d\vec{r}$. Dabei ist c eine Kurve

und \vec{V} das ortsabhängige Vektorfeld und $d\vec{r}$ ein kleines Stück des Tangentialvektors entlang der Kurve im Punkt P , der durch den Ortsvektor \vec{r} gegeben ist. Als Beispiel kann man die Arbeit entlang eines Weges in einem Kraftfeld nehmen.

Das Oberflächenintegral

Man betrachten den Fluss von Strömungsgeschwindigkeitsvektoren durch eine Querschnittsfläche F . Man will wissen, wie groß die Menge an Flüssigkeit ist, die durch eine Querschnittsfläche strömt.

Die Fläche unterteilt man deshalb in kleine Flächenelemente $d\vec{f}$. $d\vec{f}$ steht senkrecht auf dem Flächenelement und seine Länge entspricht der Größe des Flächenelementes. Innerhalb des Flächenelementes kann der Geschwindigkeitsvektor als konstant angesehen werden. Multipliziert man dann das Flächenelement mit dem Geschwindigkeitsvektor, dann erhält man das Volumen der Flüssigkeit, die pro Zeiteinheit durch das Flächenelement strömt. Das Volumen an Flüssigkeit, das durch die gesamte Fläche strömt, ist dann: $\iint_A \vec{V} \cdot d\vec{f}$. Dies ist die Menge der Flüssigkeit, die

pro Zeiteinheit durch die gesamte Querschnittsfläche strömt. Man nennt diese Größe den Fluss eines Vektorfeldes.

Das Volumenintegral

Will man die Masse eines Körpers berechnen, der unterschiedliche Massendichten hat, dann liefert das die Beziehung: $\iiint_V \rho(\vec{r}) \cdot d\vec{v}$. Die Massendichte $\rho(\vec{r})$ ist ein skalares Feld und

$d\vec{v}$ das Volumenelement.

2.2 Differenzialoperatoren in kartesischen Koordinaten oder im Euklidischen Raum

Wiederum beziehen sich die Definitionen auf eine Orthonormalbasis und kartesische Koordinaten in einem dreidimensionalen Vektorraum.

Der **Gradient** macht aus einem skalaren Feld $\lambda(x_1, x_2, x_3)$ ein Vektorfeld:

$$\vec{\nabla}(\lambda) = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}, \frac{\partial \lambda}{\partial x_3} \right)$$

bzw.

$$\text{grad}(\lambda) = \vec{\nabla}(\lambda)$$

bzw. nur als Operator geschrieben:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) .$$

Der **Laplace-Operator** ist:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} .$$

Die **Divergenz** macht aus einem Vektorfeld $\vec{V} = (v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3))$ ein skalares Feld:

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

bzw.

$$\text{div } \vec{V} = \nabla \cdot \vec{V}$$

Die **Rotation** eines Vektorfeldes \vec{V} macht aus einem Vektorfeld wieder ein Vektorfeld:

$$\text{rot } V = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

bzw.

$$\text{rot } \vec{V} = \nabla \times \vec{V}$$

Zur Berechnung der Rotation kann man auch folgendes Schema benutzen:

| | | |
|---------------------------------|-------|---|
| $\frac{\partial}{\partial x_1}$ | v_1 | $\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}$ |
| $\frac{\partial}{\partial x_2}$ | v_2 | |
| $\frac{\partial}{\partial x_3}$ | v_3 | $\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}$ |
| $\frac{\partial}{\partial x_1}$ | v_1 | |
| $\frac{\partial}{\partial x_2}$ | v_2 | $\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ |
| $\frac{\partial}{\partial x_3}$ | v_3 | |

Setzt man für v den Differenzialoperator für den Gradienten ein, so erhält man: $\text{rot} \circ \text{grad} = 0$. Dies liegt daran, dass die partiellen Ableitungen symmetrisch sind.

Eigenschaften:

(a)

$$\text{div}(\lambda \vec{V}) = \nabla(\lambda) \cdot \vec{V} + \lambda \cdot \text{div}(\vec{V})$$

$$\text{div}(\lambda \vec{V}) = \frac{\partial(\lambda \cdot v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\lambda \cdot v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\lambda \cdot v_3)}{\partial x_3} . \text{ Mit der Produktregel erhält man das}$$

Ergebnis:

(b)

$$\text{rot} \circ \text{rot} = \text{grad} \circ \text{div} - \Delta$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Man nutzt bei der Herleitung aus, dass bei einer orthonormalen Vektorraumbasis die kovarianten und kontravarianten Größen gleich sind und dass bei geraden Permutationen sich der Epsilontensor nicht ändert.

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V})_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j (\text{rot } \vec{V})_k$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V})_i = \epsilon_{ijk} \nabla_j \epsilon_{klm} \nabla_l v_m$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V})_i = \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \nabla_j \nabla_l v_m$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V})_i = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} \nabla_j \nabla_l v_m$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V})_i = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \nabla_j \nabla_l v_m$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V})_i = \nabla_m \nabla_i v_m - \nabla_l \nabla_l v_i$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V})_i = \nabla_i \nabla_m v_m - \nabla_l \nabla_l v_i$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V})_i = \nabla_i \text{div } \vec{V} - (\Delta \vec{V})_i$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V})_i = \text{grad}(\text{div } \vec{V})_i - (\Delta \vec{V})_i$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V}) = \text{grad}(\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V}$$

2.3 Das Wegintegral

Wenn das Vektorfeld ein Gradientenfeld ist und P_1 der Anfangspunkt und P_2 der Endpunkt einer Kurve c sind, dann erhält man:

$$\vec{V} = \text{grad}(\lambda) = \int_c \vec{V} \cdot d\vec{r} = \lambda(P_2) - \lambda(P_1) .$$

Das skalare Feld λ nennt man auch skalares Potenzial. Dies gilt nicht für alle Vektorfelder. In der Physik ist dieses Wegintegral als potenzielle Energie bekannt. Insbesondere ist das Wegintegral über eine geschlossene Kurve gleich 0. Die Arbeit über eine geschlossene Kurve ist 0 bedeutet, dass man konservative Kräfte hat.

$$\oint_c \vec{V} \cdot d\vec{r} = 0$$

Betrachtet man ein kleines Kurvenstück, wo sich der Gradient kaum ändert, so erhält man:

$$\int_c \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_c \text{grad}(\lambda) d\vec{r} = \text{grad}(\lambda) \cdot d\vec{r}$$

Der Tangenteneinheitsvektor \vec{e}_t ist dann parallel zum kleinen Kurvenstück $c = d\vec{r}$ oder $d\vec{r} = \vec{e}_t \cdot dr$, wobei dr die Länge des kleinen Kurvenstücks c ist. Damit erhält man:

$$\int_c \text{grad}(\lambda) \cdot d\vec{r} = \text{grad}(\lambda) \cdot \vec{e}_t \cdot dr \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{dr} \int_c \text{grad}(\lambda) \cdot d\vec{r} = \text{grad}(\lambda) \cdot \vec{e}_t \quad \text{oder}$$

$$\frac{\lambda(P_2) - \lambda(P_1)}{dr} = \text{grad}(\lambda) \cdot \vec{e}_t = |\text{grad}(\lambda)| \cdot \cos \alpha$$

Damit ist das Skalarprodukt auf der rechten Seite der Gleichung gleich der Änderung des Potenzials λ pro Längeneinheit. Die Änderung des Potenzials wird maximal sein, wenn der Einheitstangentenvektor und der Gradient parallel sind, d. h. das kleine Kurvenstück verläuft in Richtung des Gradienten. Steht der Gradient senkrecht auf den Tangenteneinheitsvektor, dann ist die Änderung von λ 0. Da sich das Potenzial λ auf einer Niveauläche nicht ändert, wird der Gradient senkrecht auf der Niveauläche stehen. So steht der Gradient z. B. in jedem Punkt einer

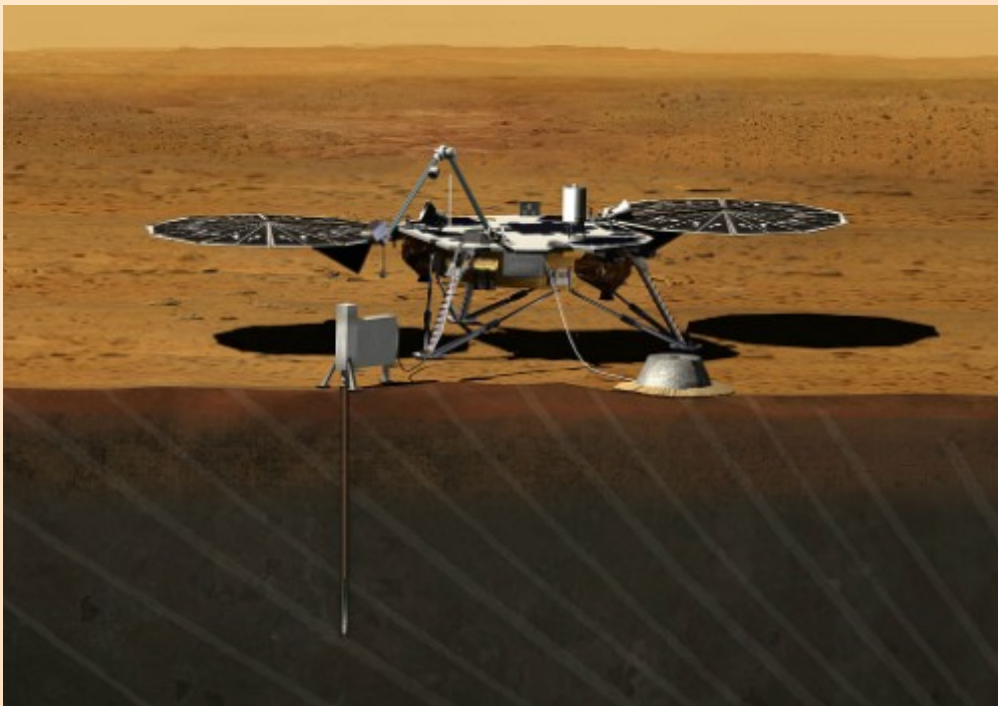
Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Kugeloberfläche senkrecht auf der Tangentialebene in diesem Punkt, wenn man als Skalarfeld das Gravitationspotenzial nimmt.

Kann man ein kleines Kurvenstück so wählen, dass der Tangenteneinheitsvektor parallel zum Gradienten liegt, das kleine Kurvenstück also in Richtung des Gradienten zeigt, dann hat man als maximale Änderung:

$$\left| \frac{\lambda(P_2) - \lambda(P_1)}{dr} \right| = |\text{grad}(\lambda)| \quad .$$

Der Gradient eines Skalarfeldes zeigt also immer in die Richtung der maximalen Änderung des Skalarfeldes.



Die maximale Änderung, Marsmission, Bild: NASA, gemeinfrei

2.4 Das Oberflächenintegral

$$\vec{V} = \text{rot}(\vec{A}) : \iint_A \vec{V} \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

\vec{A} nennt man ein Vektorpotenzial. Das Vektorpotenzial ist nur dreidimensional definiert. Das skalare Potenzial ist eindimensional. Ist die Fläche geschlossen, hat also keinen Rand, so wie bei der Kugeloberfläche, dann gilt:

$$\vec{V} = \text{rot}(\vec{A}) : \oiint_A \vec{V} \cdot d\vec{f} = 0$$



Die Rotation eines Wirbelsturms, Bild: NASA, gemeinfrei

Auch hier betrachtet man eine kleine Fläche Δf , bei der sich die Rotation und das Vektorpotenzial nicht ändert. Dann gilt mit dem Normalen-Flächeneinheitsvektor \vec{n} , der senkrecht auf Δf steht: $d\vec{f} = \Delta f \cdot \vec{n}$. Damit erhält man für das kleine Flächenstück die Näherung: $\text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} \cdot \Delta f = \oint_{\partial \Delta f} \vec{A} \cdot d\vec{s}$ oder $\text{rot} \vec{A} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\Delta f} \oint_{\partial \Delta f} \vec{A} \cdot d\vec{s}$. Das Integral $\oint_{\partial \Delta f} \vec{A} \cdot d\vec{s}$ nennt man die Zirkulation eines Vektorfeldes. Betrachtet man ein Geschwindigkeitsfeld entlang eines kleinen Kreises bei einer Kreisbewegung, dann sind $d\vec{s}$ und \vec{A} parallel, und das

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

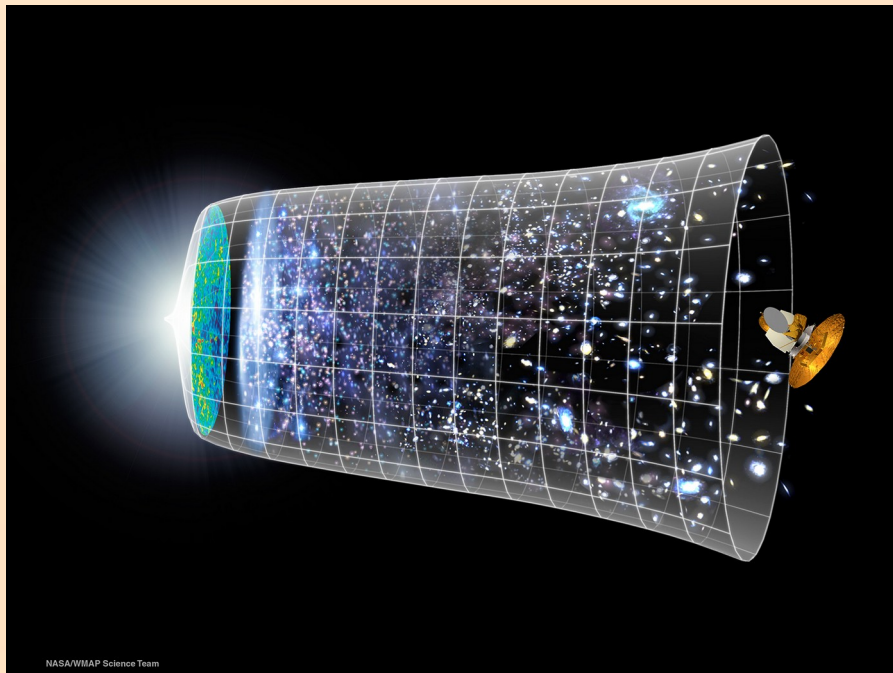
Integral wird einen Wert größer 0 haben, wenn man die Fläche so legt, dass die Kreisbewegung in der Fläche stattfindet. $\text{rot } \vec{A} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\Delta f} \oint_{\partial \Delta f} \vec{A} \cdot d\vec{s}$ entspricht dann der Wirbeldichte, bezogen auf ein kleines Flächenelement Δf . Die Zirkulation und die Wirbeldichte wird dann maximal werden, wenn $\text{rot } \vec{A}$ und \vec{n} parallel liegen, wenn man also eine Fläche um das Vektorfeld \vec{A} so legen kann, dass $\text{rot } \vec{A}$ senkrecht auf der Fläche Δf stehen. Damit hat man folgende anschauliche Vorstellung von $\text{rot } \vec{A}$: Der Vektor $\text{rot } \vec{A}$ steht senkrecht auf der Fläche der maximalen Zirkulation. Ist \vec{n} senkrecht auf der Fläche der maximalen Zirkulation, dann ist $|\text{rot } \vec{A}|$ die maximale Wirbeldichte. So ist z. B. $\text{rot } \vec{B}$ ein Vektor, der senkrecht auf dem magnetischen Feldwirbel steht.

2.5 Das Volumenintegral

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{V}) dv = \oint_{\partial V} \vec{V} \cdot d\vec{f}$$

Für kleine Volumen gilt: $\iiint_{\Delta V} \operatorname{div}(\vec{V}) dv = \operatorname{div}(\vec{V}) \cdot \Delta v = \iint_{\partial \Delta v} \vec{V} \cdot d\vec{f}$ und damit analog zu

oben: $\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{1}{\Delta v} \iint_{\partial \Delta v} \vec{V} \cdot d\vec{f} \dots$. Man erhält somit die Quelldichte eines Vektorfeldes bezogen auf die Oberfläche eines Volumenelements. Ist die Quelldichte 0 bezogen auf eine geschlossene Oberfläche, dann ist das Vektorfeld \vec{V} frei von Quellen, die das Vektorfeld erzeugen. Bei Punktladungen oder dem Gravitationsfeld quellen die Feldvektoren zentral nach außen und man erhält beim elektrischen Feld als Quelldichte: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho$. Das Magnetfeld hat keine Quellen im Gegensatz zum elektrischen Feld. Es gibt keine magnetischen Monopole, d. h.: $\operatorname{div} \vec{B} = 0$.



Die Divergenz des Universums – der Urknall, Bild: NASA, gemeinfrei

2.6 Beispiele und Bedingungen für Potenziale

Die Überlegungen gelten für kartesische Koordinatensysteme. Eine Verallgemeinerung auf krummlinige Koordinaten ist ebenfalls möglich und wird später besprochen, um in diesem Fall die Differenzialoperatoren anzuwenden.

Beispiel 1:

$T = A - D \cdot x_3$ sei ein Temperaturfeld. Die Temperatur nimmt linear mit der Höhe x_3 ab. Die Proportionalitätskonstante ist D . Die Höhe hat einen bestimmten Definitionsbereich.

$\text{grad}(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -D \end{pmatrix}$. Der Gradient zeigt entgegen zur x_3 -Achse. Der Gradient zeigt in Richtung der stärksten Änderung der Temperatur, in Richtung zunehmender Temperatur.

Beispiel: Festkörperrotation

$$\vec{V} = \text{rot}(\vec{A}) : \iint_A \vec{V} \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial A} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Die Drehachse eines zylindrischen Festkörpers sei die x_3 -Achse. \vec{d} sei der Abstandsvektor eines Punktes in dem Zylinder zur Drehachse. Der Distanzvektor steht also senkrecht zur Drehachse. Der Geschwindigkeitsvektor steht senkrecht zum Abstandsvektor. Man macht folgenden Ansatz für den Geschwindigkeitsvektor:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -D \cdot x_2 \\ D \cdot x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Der Abstandsvektor hat folgende Koordinaten: $\vec{d} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Damit verschwindet das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{d} = 0$. Die Länge des Distanzvektors ist: $|\vec{d}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ und

$$|\vec{v}| = D \cdot |\vec{d}|. \text{ Die Rotation ist: } \text{rot}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \cdot D \end{pmatrix}.$$

Damit gilt: $\iint_A \text{rot}(\vec{V}) \cdot d\vec{f} = 2 \cdot D \iint_A df$, weil der Flächenvektor parallel zum Rotationsvektor verläuft. Die Fläche A ist die Kreisfläche mit Radius $|\vec{d}|$. Damit erhält man:

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$\iint_A \text{rot}(\vec{V}) \cdot d\vec{f} = 2 \cdot D \iint_A df = 2 \cdot D \cdot \pi \cdot |\vec{d}|^2 .$$

Der Rotationsvektor zeigt in Richtung der Rotationsachse. Senkrecht dazu ist die Fläche der maximalen Zirkulation. Die Zirkulation ist: $\oint \vec{v} \cdot d\vec{s}$. Beide Vektoren im Skalarprodukt des Integrals sind parallel. Also ist das Skalarprodukt $|\vec{v}| \cdot ds$ und damit wird das Integral: $\oint \vec{v} \cdot d\vec{s} = |\vec{v}| \cdot \oint ds = 2 \cdot \pi \cdot |\vec{d}| \cdot D |\vec{d}| = 2 \cdot D \cdot \pi \cdot |\vec{d}|^2$. Links steht die Zirkulation und rechts steht die Kreisfläche multipliziert mit der Wirbeldichte. Der Rotationsvektor zeigt in Richtung der Rotationsachse und sein Betrag ist die maximale Wirbeldichte pro Flächeneinheit.

Beispiel: Allseitige elastische Ausdehnung

$$\iiint_V \text{div}(\vec{V}) dv = \oiint_{\partial V} \vec{V} \cdot d\vec{f}$$

Man betrachtet ein Gas, das sich von einem Punkt aus in jede Richtung immer schneller ausdehnt. Für jeden Ortsvektor gibt es einen parallelen Geschwindigkeitsvektor, der radial zunimmt: $\vec{v} = D \cdot \vec{r}$. Damit gilt für die Divergenz: $\text{div} \vec{v} = 3 \cdot D$ und man erhält:

$$\iiint_V \text{div} 3 D dv = 4 \cdot D \cdot \pi \cdot r^3 .$$

Der Fluss durch die Oberfläche der Kugel ist $\oiint_{\partial V} \vec{V} \cdot d\vec{f} = \oint_{\partial V} D \cdot \vec{r} \cdot d\vec{f}$. Aber \vec{r} und $d\vec{f}$ stehen senkrecht aufeinander. Also ergibt sich:

$$D \cdot |\vec{r}| \cdot \oint_{\partial V} df = 4 \cdot D \cdot \pi \cdot r^3 .$$

Die Integralsätze gelten nicht für allgemeine Vektorfelder. Was sind die Bedingungen dafür, dass man die Integralsätze anwenden kann, d. h.:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \text{grad}(\lambda) \\ \vec{V} &= \text{rot}(\vec{A}) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{rot} \circ \text{grad} &= 0 \\ \text{div} \circ \text{rot} &= 0 \end{aligned}$$

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen der Differenzialoperatoren. Das bedeutet:

$$\begin{aligned} \vec{V} &= \text{grad}(\lambda) \Rightarrow \text{rot}(\vec{V}) = 0 \\ \vec{V} &= \text{rot}(\vec{A}) \Rightarrow \text{div} \vec{V} = 0 \end{aligned}$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Die umgekehrte Richtung der Folgerungen gelten nur unter folgenden Bedingungen an den Definitionsbereich der Vektorfelder:

Je zwei Elemente aus dem Definitionsbereich können mit einem Weg verbunden werden, dann nennt man den Definitionsbereich 0-zusammenhängend. Ausgenommen sind hier Definitionsbereiche, die die Vereinigung disjunkter Mengen sind.

Jeder geschlossene Weg im Definitionsbereich kann auf einen Punkt zusammengezogen werden, dann nennt man den Definitionsbereich 1-zusammenhängend. Ausgeschlossen sind hier Flächen, die Löcher haben.

Kann man jede geschlossene Fläche vom **Geschlecht 1** im Definitionsbereich auf einen Punkt zusammenziehen, dann nennt man den Definitionsbereich 2-zusammenhängend. Ausgenommen sind hier Volumen, die ein dreidimensionales Loch haben.

Flächen vom Geschlecht 1 sind homöomorph zu Sphären, man benötigt einen Schnitt, um sie zu zerlegen. Ein Torus ist eine Fläche vom Geschlecht 2. Man braucht zwei Schnitte, um sie zu zerlegen.

Man erhält dann folgende Äquivalenzen:

$$\vec{V} = \text{grad}(\lambda) \Leftrightarrow \text{rot}(\vec{V}) = 0 \quad \text{gilt auf einem 1-zusammenhängenden Definitionsbereich.}$$

$$\vec{V} = \text{rot}(\vec{A}) \Leftrightarrow \text{div} \vec{V} = 0 \quad \text{gilt für einen 2-zusammenhängenden Definitionsbereich.}$$

Beispiel: Das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters:

Der Leiter sei repräsentiert durch die x_3 -Koordinatenlinie. Der Leiter ist also unendlich lang.

$$|\vec{B}| = \frac{Q}{|\vec{r}|} \quad . \quad \text{Mit den kartesischen Koordinaten } B_1 = \frac{-C \cdot x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad B_2 = \frac{C \cdot x_1}{x_1^2 + x_2^2} \quad \text{und} \quad B_3 = 0 \quad \text{gilt}$$

$\text{rot} \vec{B} = 0$. Bei den Magnetfeldern kann man aber \vec{B} nicht als Gradient eines skalaren Potentials darstellen. Dies liegt am Definitionsbereich, weil der Leiter den Definitionsbereich unzusammenhängend macht.

Ein weiteres Beispiel ist das elektrische Feld um eine Punktladung: $|\vec{E}| = \frac{C}{|\vec{r}|^2}$. Mit kartesischen

Koordinaten: $E_i = \frac{C \cdot x_i}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}}$. Das elektrische Feld ist parallel zum Ortsvektor. Man erhält als

Divergenz für das elektrische Feld: $\text{div} \vec{E} = 0$. Der Definitionsbereich des elektrischen Feldes ist nicht 1-zusammenhängend, weil der Punkt, in dem die Ladung sitzt, nicht zum Definitionsbereich gehört. Deshalb gibt es auch kein Vektorpotential \vec{A} , für das $\vec{E} = \text{rot} \vec{A}$ gilt.

Kapitel III: Krummlinige Koordinaten

3.1 Kurven und Hyperflächen

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind in der Mathematik ein Oberbegriff für Kurven, Flächen und andere geometrische Objekte, die – aus der Sicht der Analysis – lokal aussehen wie ein euklidischer Raum. Im Unterschied zu topologischen Mannigfaltigkeiten ist es auf differenzierbaren Mannigfaltigkeiten möglich, über Ableitungen und verwandte Konzepte zu sprechen. Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind Hauptgegenstand der Differentialgeometrie und der Differentialtopologie. Sie spielen auch eine zentrale Rolle in der theoretischen Physik, insbesondere in der klassischen Mechanik bei Systemen, die Zwangsbedingungen unterliegen, sowie bei der Beschreibung der Raumzeit in der **allgemeinen Relativitätstheorie**.

Es gibt zwei Herangehensweisen an differenzierbare Mannigfaltigkeiten: einerseits als Teilmengen eines höherdimensionalen euklidischen Raumes, die entweder durch Gleichungen oder durch Parametrisierungen beschrieben sind, und andererseits als abstrakte Mannigfaltigkeiten, deren differenzierbare Struktur durch einen Atlas gegeben ist. Die Äquivalenz der beiden Sichtweisen wird durch den Einbettungssatz von Whitney sichergestellt.

Definition:⁹ M sei ein topologischer Raum. Eine **Karte** ist ein Paar $(U; \Phi)$ bestehend aus einer in M offenen Teilmenge U und einem Homöomorphismus $\Phi: U \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

Ein **Atlas** von M ist eine Familie $(U_i; \Phi_i)_{i \in I}$ von Karten, sodass die Vereinigung aller offenen Teilmengen U_i die Menge M ergibt.

Zwei Karten $(U_i; \Phi_i)$ und $(U_j; \Phi_j)$ heißen **C^k -kompatibel**, wenn $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}: \Phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \Phi_i(U_i \cap U_j)$ ein C^k -Diffeomorphismus (stetig bijektive k -mal differenzierbare Abbildung) ist.

Ein Atlas heißt **C^k -differenzierbarer Atlas**, wenn alle Kartenpaare des Atlas C^k -kompatibel sind.

Zwei C^k -differenzierbare Atlanten sind **äquivalent**, wenn alle ihre Karten miteinander C^k -kompatibel sind. Diese Äquivalenzklasse von Atlanten bezüglich dieser Äquivalenzrelation wird **C^k -differenzierbare Struktur** der Mannigfaltigkeit genannt. Ist $k = \infty$, so spricht man auch von einer glatten Struktur.

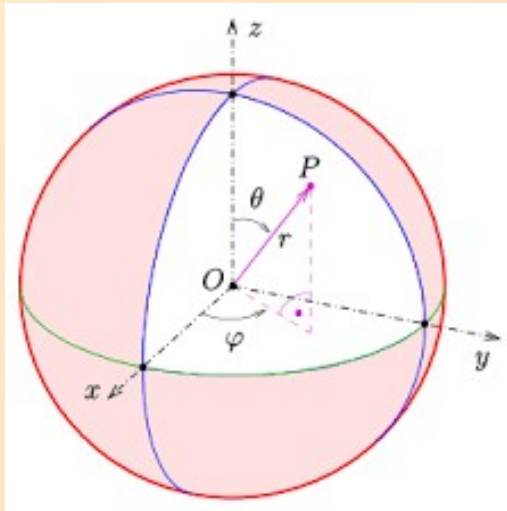
Eine k -mal **differenzierbare Mannigfaltigkeit** ist ein topologischer Hausdorffraum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, zusammen mit einer C^k -differenzierbaren Struktur. Die differenzierbare Mannigfaltigkeit hat die Dimension n , wenn eine Karte und damit alle Karten in eine Teilmenge des \mathbb{R}^n abbilden.

Hauptpunkt der Definition sind die Karten. Dadurch ist es möglich, die Mannigfaltigkeit lokal durch eine Koordinatenmenge (Teilmenge des \mathbb{R}^n) zu beschreiben. Man nennt dies die lokalen Koordinaten.

⁹ Siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Mannigfaltigkeit>

Der Euklidische Raum \mathbb{R}^3 ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit. Er lässt sich lokal auch durch andere als die kartesischen Koordinaten beschreiben. Die folgenden Beispiele zeigen, wie man die Punkte im \mathbb{R}^3 auch mit Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten beschreiben kann.

Beispiel 1: Kugelkoordinaten



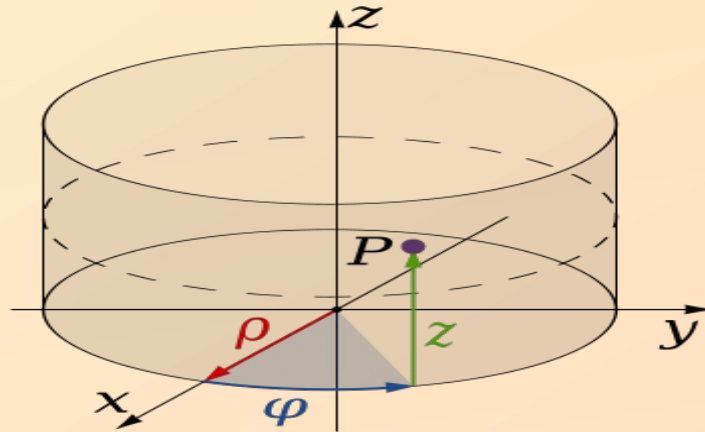
Quelle: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/6/69/Kugelkoord-def.svg/300px-Kugelkoord-def.svg.png>

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi & \vec{P} &= x^1 \cdot \vec{e}_1 + x^2 \cdot \vec{e}_2 + x^3 \cdot \vec{e}_3 \\ x^2 &= r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi & \vec{P} &= r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \vec{e}_1 + r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \cdot \vec{e}_2 + r \cdot \cos\theta \cdot \vec{e}_3 \\ x^3 &= r \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

Links stehen die Kartentransformationen von Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten. Da der Euklidische Raum ebenfalls ein Vektorraum ist, stehen neben den kartesischen Koordinaten die entsprechenden Ortsvektoren. Bei den Ortsvektoren sind die Symbole x^1, x^2, x^3 die Komponenten des Vektors. Sie stimmen also mit den kartesischen Koordinaten des Punktes überein. Die kartesischen Koordinaten bilden selbst schon einen Vektorraum, sodass diese Identifizierung von Punktkoordinaten und Ortsvektoren einen Sinn macht.

Allerdings sind die Komponenten desselben Ortsvektors in Kugelkoordinaten Funktionen von den Kugelkoordinaten. r, θ, φ . Die Kugelkoordinaten selbst bilden keinen Vektorraum, wie das bei den kartesischen Koordinaten der Fall ist. Andererseits gibt es eine Koordinatentransformation von den Kugelkoordinaten in die kartesischen Koordinaten. Allerdings ist diese Transformation nicht überall ein Homöomorphismus. So lässt sich der Koordinatenursprung nur für $r=0$ darstellen. Dann spielt es aber keine Rolle, welche Werte die Winkel annehmen. Liegt ein Punkt auf der x^3 -Achse, dann ist der Winkel $\theta = 0$. Dann spielt es aber ebenfalls keine Rolle, welchen Wert der Winkel φ hat, um denselben Punkt darzustellen.

Beispiel 2: Zylinderkoordinaten



Quelle: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/b/b7/Cylindrical_Coordinates.svg/220px-Cylindrical_Coordinates.svg.png

$$\begin{aligned} x^1 &= r \cdot \cos\theta \\ x^2 &= r \cdot \sin\theta \\ x^3 &= z \end{aligned} \quad \begin{aligned} \vec{A} &= x^1 \cdot \vec{e}_1 + x^2 \cdot \vec{e}_2 + x^3 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{A} &= r \cdot \cos\theta \cdot \vec{e}_1 + r \cdot \sin\theta \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Die Darstellung des Koordinatenursprungs ist auch hier nicht eineindeutig möglich.

Für die weiteren Überlegungen betrachten wir die Mannigfaltigkeiten als Teilmengen eines höherdimensionalen euklidischen Raumes, die entweder durch Gleichungen oder durch Parametrisierungen beschrieben sind.

Eine Kurve ist eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit. Betrachtet man die Kurve als Teilmenge eines höherdimensionalen Euklidischen Raumes, \mathbb{R}^n so kann man die kartesischen Koordinaten der Kurve durch den Kurvenparameter t mit folgenden Parametrisierungen beschreiben.

$$x^i = x^i(t) \quad i = 1, \dots, n$$

Eine Hyperfläche ist eine $n-1$ dimensionale Untermannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n . Die Koordinaten (t^1, \dots, t^{n-1}) , die die Hyperfläche beschreibt, sind dann durch folgende Parametrisierungen

$$x^i = x^i(t^1, \dots, t^{n-1}) \quad i = 1, \dots, n$$

oder durch die Gleichung

$$f(x^1, \dots, x^n) = c \text{ mit } c \in \mathbb{R} \text{ gegeben.}$$

Die zweite Darstellung nennt man die implizite Darstellung der Hyperfläche. Es handelt sich um eine Niveaulfläche einer skalaren Funktion.

Man kann mit diesen Festlegungen besondere Kurven und Hyperflächen beschreiben. Hat man eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit, so lassen sich Punkte dieser Mannigfaltigkeit lokal durch Koordinaten beschreiben: $P(q^1, \dots, q^n)$. lässt man die i -te Koordinate variieren und hält die anderen Koordinaten fest, so erhält man eine Kurve, die entsprechende Koordinatenlinie in der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit. Darüber hinaus erhält man eine Koordinaten-Hyperfläche, wenn man eine Koordinate q^i konstant hält und die anderen Koordinaten variiert. Ziel soll es sein, mit den Koordinatenlinien und den Koordinaten-Hyperflächen für jeden Punkt der Mannigfaltigkeit ein Koordinatensystem einzuführen.

Zur Schreibweise vereinbaren wir, dass kartesische Koordinaten immer durch x^i dargestellt werden. Für allgemeine Koordinaten nehmen wir das Symbol q^i . Haben die Koordinaten einen besonderen Zusammenhang, wie zum Beispiel bei Kugel- oder Zylinderkoordinaten, so werden entsprechende Symbole benutzt, die anschaulich die Koordinaten beschreiben. Insbesondere bei Hyperfläche im dreidimensionalen Euklidischen Raum wird auch statt x^1, x^2, x^3 die Schreibweise x, y, z für die Euklidischen Koordinaten benutzt.

Beispiel einer Kurve

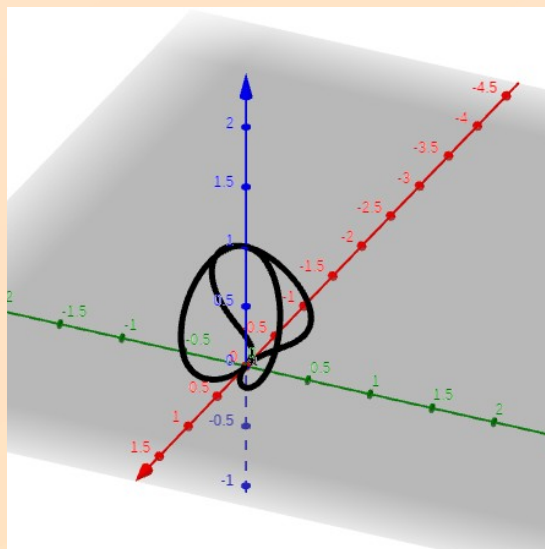


Abbildung: Explizite Darstellung einer Kurve $(\sin^2(t) \cdot \cos(t), \cos^2(t) \cdot \sin(t), \cos^4(t))$, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Beispiel einer Hyperfläche:

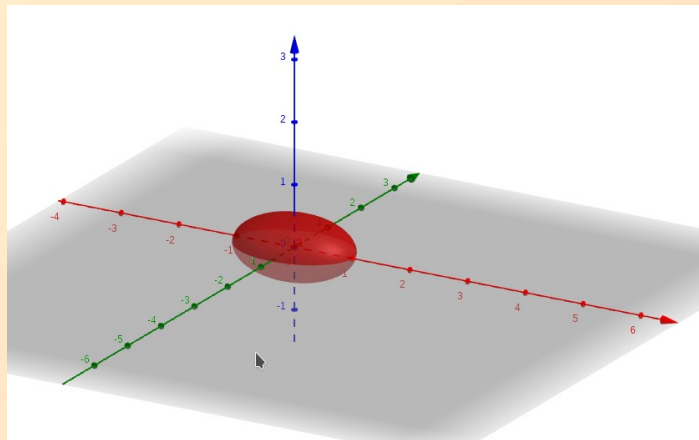


Abbildung: Implizite Darstellung eines Ellipsoids: $x^2+2y^2+4z^2=1$, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

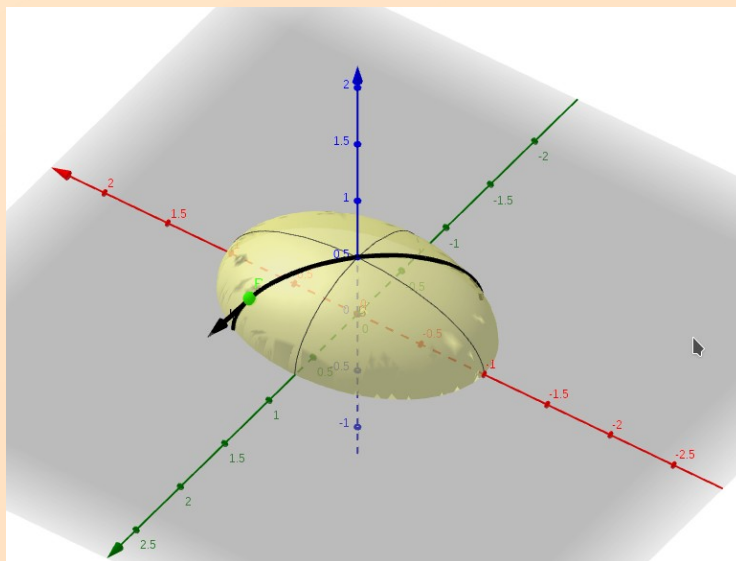


Abbildung: Weg $y(t)$ auf dem oberen Teil des Ellipsoids mit der Einbettung X und dem Tangentialvektor im Punkt

$$P\left(\frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{4}\right), \text{ Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei}$$

3.2 Ko- und kontravariante Vektorraumbasen oder Tangential- und Kotangentialräume

Die kovarianten Basisvektoren sind die Tangentenvektoren an die q^α - Koordinatenlinien, d. h.:

$$\begin{aligned} T^i &= \frac{\partial x^i}{\partial q_\alpha} \\ \text{mit} \\ x^i &= x^i(\text{const}, \dots, q^\alpha, \dots, \text{const.}) \\ \text{und} \\ \vec{g}_\alpha &= \frac{\partial x^i}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{e}_i, \\ \text{oder die } i\text{-te Komponente} \\ (\vec{g}_\alpha)^i &= \frac{\partial x^i}{\partial q_\alpha} \end{aligned}$$

sind die Komponenten der kovarianten Basisvektoren bezogen auf die Euklidische Orthonormalbasis $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$.

Damit haben wir jedem Punkt der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit die Basis eines Vektorraums zugeordnet. Man nennt dies den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit M und schreibt TM . Betrachtet man den dazugehörigen Dualraum, dann erhält man die kontravarianten Basisvektoren \vec{g}^α . Wir wollen diese anschaulich über die Koordinatenhyperflächen herleiten.

Die kontravarianten Basisvektoren sind die Normalenvektoren auf die α -Koordinaten-Hyperflächen:

$$x^i = x^i(q^1, \dots, \text{const}, \dots, q^n)$$

Der Zusammenhang zwischen den x^i und den q^i ist durch die Gleichung:

$$q^i = q^i(x^1, \dots, x^n)$$

gegeben, weil wir voraussetzen, dass die Koordinatentransformation eineindeutig ist, also umkehrbar. Da wir die α -Koordinaten-Hyperfläche betrachten, ist:

$$q^\alpha = q^\alpha(x^1, \dots, x^n) = \text{const.}$$

Bei der α -Koordinaten-Hyperfläche handelt es sich also um eine Niveaufäche einer skalaren Funktion q^α . Die Komponenten des Normalenvektors auf der Niveaufäche ist durch $\nabla(q^\alpha)$ gegeben.

Der Ausdruck $(\vec{g}^\alpha)_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i}$ entspricht dann den Koordinaten des kontravarianten Basisvektors

\vec{g}^α . Die Berechnung des Skalarprodukts mit der Kettenregel liefert also

$$\vec{g}^\alpha \cdot \vec{g}_\beta = (\vec{g}^\alpha)_i \cdot (\vec{g}_\beta)^i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial q_\beta} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q_\beta} = \delta^\alpha_\beta.$$

Wir können somit jedem Punkt der Mannigfaltigkeit einen kovarianten und kontravarianten Metriktensor zuordnen.

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j \\ g^{ij} &= \vec{g}^i \cdot \vec{g}^j \end{aligned}$$

3.3 Beispiele

3.3.1 Kugelkoordinaten

$$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \theta$$

$$\vec{A} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{A} = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y + r \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_z$$

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta} \cdot d\theta + \frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi} \cdot d\varphi$$

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \dots$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$d\vec{A} = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$d\vec{A} = \left(\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial r} \right) dr + \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \right) d\theta + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right) d\varphi$$

$$d\vec{A} = (\sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y + \cos \theta \cdot \vec{e}_z) dr + (r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y - r \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_z) d\theta + \dots$$

$$(-r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_x + r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_y) d\varphi$$

$$\vec{v}_r = \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y + \cos \theta \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{v}_\theta = r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_x + r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_y - r \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{v}_\varphi = -r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \cdot \vec{e}_x + r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\theta = 0$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\varphi = 0$$

$$\vec{v}_\theta \cdot \vec{v}_\varphi = 0$$

$$d\vec{A} = dr \vec{v}_r + d\theta \vec{v}_\theta + d\varphi \vec{v}_\varphi$$

$$|\vec{v}_r|^2 = \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta \cdot (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \theta = 1$$

$$|\vec{v}_\theta|^2 = r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \theta = r^2$$

$$|\vec{v}_\varphi|^2 = r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \varphi = r^2 \cdot \sin^2 \theta$$

$$d\vec{A} = dr \cdot \vec{e}_r + r \cdot d\theta \cdot \vec{e}_\theta + r \cdot \sin \theta \cdot d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} dr \cdot \vec{e}_r &= dr(e_r) = 1 \\ d\theta \cdot \vec{e}_\theta &= d\theta(\vec{e}_\theta) = 1 \\ d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi &= d\varphi(\vec{e}_\varphi) = 1 \end{aligned} \quad (g_{nm}) = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \cdot \vec{v}_r & \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\theta & \vec{v}_r \cdot \vec{e}_\varphi \\ \vec{v}_\theta \cdot \vec{v}_r & \vec{v}_\theta \cdot \vec{v}_\theta & \vec{v}_\theta \cdot \vec{e}_\varphi \\ \vec{v}_\varphi \cdot \vec{v}_r & \vec{v}_\varphi \cdot \vec{v}_\theta & \vec{v}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cdot \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

| | $\vec{v}_r = \frac{\partial \vec{A}}{\partial r}$ | $\vec{v}_\theta = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta}$ | $\vec{v}_\varphi = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \varphi}$ |
|-------------|--|---|---|
| \vec{e}_x | $\frac{\partial x}{\partial r} = \sin \theta \cdot \cos \varphi$ | $\frac{\partial x}{\partial \theta} = r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi$ | $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$ |
| \vec{e}_y | $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta \cdot \sin \varphi$ | $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi$ | $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$ |
| \vec{e}_z | $\frac{\partial z}{\partial r} = \cos \theta$ | $\frac{\partial z}{\partial \theta} = -r \cdot \sin \theta$ | $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$ |

3.3.2 Koordinatentransformation von Zylinderkoordinaten (r, θ, z) in kartesische Koordinaten (x, y, z)

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$z = z$$

$$\vec{A} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$$

$$\vec{A} = r \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_x + r \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z$$

| | $\vec{v}_r = \frac{\partial \vec{A}}{\partial r}$ | $\vec{v}_\theta = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \theta}$ | $\vec{e}_z = \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$ |
|-------------|---|---|---|
| \vec{e}_x | $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos \theta$ | $\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r \cdot \sin \theta$ | $\frac{\partial x}{\partial z} = 0$ |
| \vec{e}_y | $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin \theta$ | $\frac{\partial y}{\partial \theta} = r \cdot \cos \theta$ | $\frac{\partial y}{\partial z} = 0$ |
| \vec{e}_z | $\frac{\partial z}{\partial r} = 0$ | $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$ | $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 1$ |

$$\vec{v}_r = \cos \theta \cdot \vec{e}_x + \sin \theta \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{v}_\theta = -r \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_x + r \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{v}_z = \vec{e}_z$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_\theta = 0$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_z = 0$$

$$\vec{v}_\theta \cdot \vec{v}_z = 0$$

$$|\vec{v}_r| = 1$$

$$|\vec{v}_\theta| = r$$

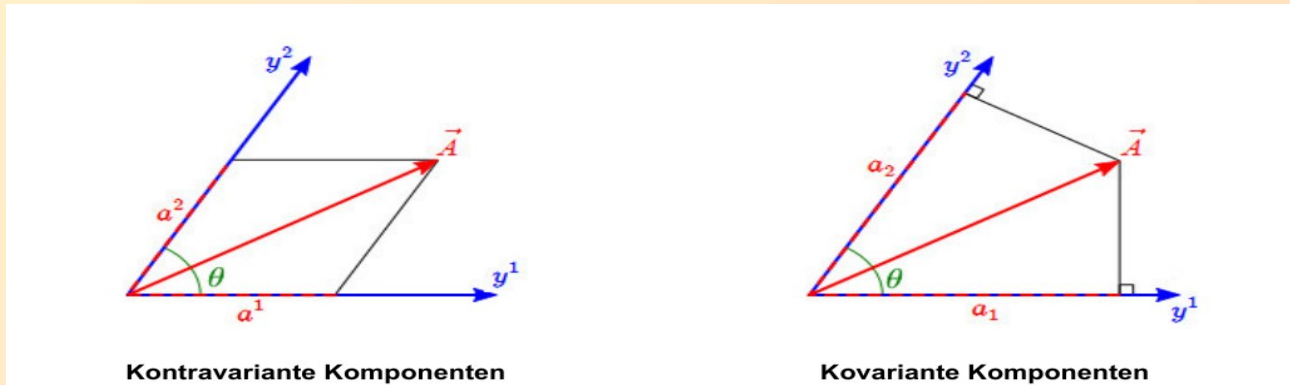
$$|\vec{v}_z| = 1$$

$$(g_{nm}) = \begin{pmatrix} \vec{v}_r \cdot \vec{v}_r & \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\theta & \vec{v}_r \cdot \vec{e}_z \\ \vec{v}_r \cdot \vec{v}_\theta & \vec{v}_\theta \cdot \vec{v}_\theta & \vec{v}_\theta \cdot \vec{e}_z \\ \vec{v}_r \cdot \vec{e}_z & \vec{v}_\theta \cdot \vec{e}_z & \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{A} = dr \vec{v}_r + d\theta \vec{v}_\theta + dz \vec{e}_z$$

$$d\vec{A} = dr \cdot \vec{e}_r + r d\theta \cdot \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

3.3.3 Schiefes Koordinatensystem



$$x = a_1 + a_2 \cdot \cos\theta$$

$$y = \sin\theta \cdot a_2$$

$$\vec{A} = x \cdot \vec{e}_x + y \cdot \vec{e}_y$$

$$\vec{A} = (a_1 + a_2 \cdot \cos\theta) \cdot \vec{e}_x + \sin\theta \cdot a_2 \cdot \vec{e}_y$$

| | $\vec{v}_{a_1} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial a_1}$ | $\vec{v}_{a_2} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial a_2}$ |
|-------------|---|---|
| \vec{e}_x | 1 | $\cos\theta$ |
| \vec{e}_y | 0 | $\sin\theta$ |

$$\begin{aligned} \vec{v}_{a_1} \cdot \vec{v}_{a_1} &= 1 \\ \vec{v}_{a_2} \cdot \vec{v}_{a_2} &= 1 \\ \vec{v}_{a_1} \cdot \vec{v}_{a_2} &= \cos\theta \end{aligned} \quad (g_{nm}) = \begin{pmatrix} \vec{v}_{a_1} \cdot \vec{v}_{a_1} & \vec{v}_{a_1} \cdot \vec{v}_{a_2} \\ \vec{v}_{a_2} \cdot \vec{v}_{a_1} & \vec{v}_{a_2} \cdot \vec{v}_{a_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}$$

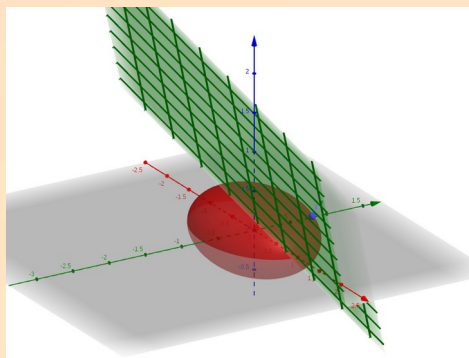


Abbildung Ellipsoid: $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ mit Punkt P und Tangentialebene, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

3.4. Transformationsverhalten von krummlinigen Koordinaten

Wir gehen von kartesischen Koordinaten x^i und zwei weiteren Koordinaten q^i bzw. r^i aus, die Punkte einer Mannigfaltigkeit darstellen. Zwischen den Koordinaten existieren also eindeutige Abbildungen, die sogenannten Koordinatentransformationen. Die kovarianten Basisvektoren \vec{g}_α bezüglich der Koordinaten q^i haben dann die Komponenten: $(\vec{g}_\alpha)^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}$ und die kontravarianten Basisvektoren \vec{g}^α haben dann die Komponenten $(\vec{g}^\alpha)_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i}$. Analoge Überlegungen gelten für die Koordinaten r^i .

| Koordinaten | Komponenten der kovarianten Basisvektoren | Komponenten der kontravarianten Basisvektoren |
|-------------|---|---|
| q^i | $(\vec{g}_\alpha)^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}$ | $(\vec{g}^\alpha)_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i}$ |
| r^i | $(\vec{h}_\alpha)^i = \frac{\partial x^i}{\partial r^\alpha}$ | $(\vec{h}^\alpha)_i = \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^i}$ |

Damit erhält man mit der Kettenregel folgende Gleichung: $(\vec{h}_\alpha)^i = \frac{\partial x^i}{\partial r^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial q^\nu} \frac{\partial q^\nu}{\partial r^\alpha} = (\vec{g}_\nu)^i \frac{\partial q^\nu}{\partial r^\alpha}$ oder in Vektorschreibweise: $\vec{h}_\alpha = \frac{\partial q^\nu}{\partial r^\alpha} \vec{g}_\nu$ oder analog im kontravarianten Fall: $\vec{h}^\alpha = \frac{\partial r^\alpha}{\partial q^\nu} \vec{g}^\nu$.

| Koordinaten | Komponenten der kovarianten Basisvektoren | Komponenten der kontravarianten Basisvektoren |
|---------------------------------|---|---|
| q^i | $(\vec{g}_\alpha)^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}$ | $(\vec{g}^\alpha)_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i}$ |
| r^i | $(\vec{h}_\alpha)^i = \frac{\partial x^i}{\partial r^\alpha}$ | $(\vec{h}^\alpha)_i = \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^i}$ |
| Transformationsverhalten | $\vec{h}_\alpha = \frac{\partial q^\nu}{\partial r^\alpha} \vec{g}_\nu$ | $\vec{h}^\alpha = \frac{\partial r^\alpha}{\partial q^\nu} \vec{g}^\nu$ |

Zuletzt zeigen wir noch, dass die Matrix der kontravarianten Basistransformation invers zur Matrix der kovarianten Basistransformation ist.

$\delta_i^j = \frac{\partial r^i}{\partial r^j} = \frac{\partial r^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial r^j}$. Also ist die Matrix $\left(\frac{\partial r^i}{\partial q^k} \right)_{ik}$ invers zu $\left(\frac{\partial q^k}{\partial r^j} \right)_{kj}$. Damit haben wir alle Ergebnisse aus Kapitel I auf die krummlinigen Koordinaten übertragen.

Wenn man also krummlinige Koordinaten einführt, dann wird im jedem Punkt im Raum ein Vektorraum festgelegt. Er heißt Tangentialraum oder Kotangentialraum. Wir haben gesehen, wie man die Basisvektoren in jedem Punkt berechnen kann. Das Transformationsverhalten bei

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Koordinatentransformation zieht eine Änderung der Basisvektoren nach sich. Das Transformationsverhalten ist wie bei den in Kapitel I besprochenen Basistransformationen von Vektorraumbasen.

Zusätzlich kann man die Ergebnisse über den Metriktensor aus Kapitel I auf die krummlinigen Koordinaten übertragen. Wenn man also irgendwo im Raum einen Vektor darstellen will, dann macht man das in Bezug auf den Vektorraum und dessen Basis, die in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit definiert sind. Wenn man ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit betrachtet, dann werden die Vektoren des Vektorfeldes durch die Komponenten beschrieben, die der Vektor bezogen auf die Vektorraumbasis in diesem Punkt der Mannigfaltigkeit hat.

Betrachtet man jetzt noch das entsprechende Verhalten der Vektorkomponenten, so erhält man:

| Koordinaten | Komponenten der kovarianten Basisvektoren | Komponenten der kontravarianten Basisvektoren |
|---|---|---|
| q^i | $(\vec{g}_\alpha)^i = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha}$ | $(\vec{g}^\alpha)_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i}$ |
| r^i | $(\vec{h}_\alpha)^i = \frac{\partial x^i}{\partial r^\alpha}$ | $(\vec{h}^\alpha)_i = \frac{\partial r^\alpha}{\partial x^i}$ |
| Transformationsverhalten der Vektorraumbasis | $\vec{h}_\alpha = \frac{\partial q^\nu}{\partial r^\alpha} \vec{g}_\nu$ | $\vec{h}^\alpha = \frac{\partial r^\alpha}{\partial q^\nu} \vec{g}^\nu$ |
| Transformationsverhalten der Vektorkomponenten als Transformationsmatrix und als Komponenten | $\left(\frac{\partial q^k}{\partial r^j} \right)_{kj}$ | $\left(\frac{\partial r^i}{\partial q^k} \right)_{ik}$ |
| Transformationsverhalten der Vektorkomponenten | $R_j = \frac{\partial q^k}{\partial r^j} Q_k$ | $R^j = \frac{\partial r^j}{\partial q^k} Q^k$ |

Wir haben die entsprechenden Basisvektoren in krummlinigen Koordinatensystemen in Bezug auf kartesische Koordinaten definiert. Dazu waren die entsprechenden Transformationen von krummlinigen Koordinaten in die kartesischen Koordinaten notwendig. Man kann aber auch direkt jeden Tangentialvektor als Ableitungen einer Kurve definieren.

$$\text{Sei } q^i = q^i(t)$$

eine Parameterdarstellung der Kurve in einem Punkt P der Mannigfaltigkeit, also $P = (q^i(0))$. Dann sind die Ableitungen:

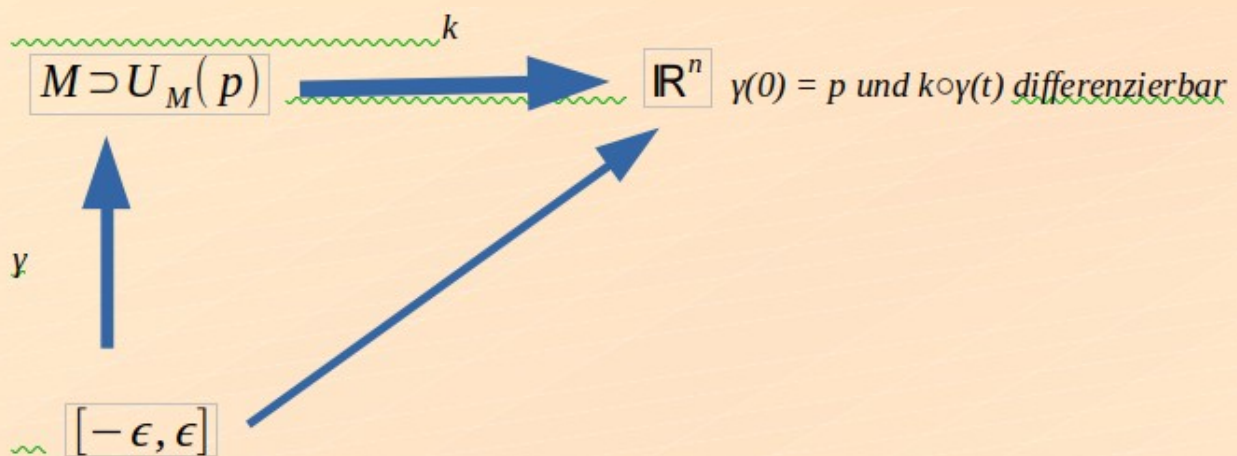
$$A^i = \left. \frac{dq^i(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

die Komponenten eines Tangentialvektors. Allerdings können mehrere Kurven dieselben Komponenten eines Tangentialvektors liefern. Deshalb fasst man alle Kurven, die dieselben

Komponenten liefern, zu einer Äquivalenzklasse zusammen. Damit kann man den Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit auch ohne Bezug auf kartesische Koordinaten definieren:

Geometrische Definition des Tangentialraums

Eine Möglichkeit, den Tangentialraum zu definieren, besteht darin, einfach statt einer Kurven-Ableitung die Kurven selbst zu nehmen, und zwar alle die Kurven, die einen Punkt p in derselben Richtung mit derselben Geschwindigkeit durchlaufen. Dass sie genau das tun, verifiziert man über Karten, die in einer Umgebung von p definiert sind. Nehmen wir beispielsweise eine Kurve $\gamma(t)$, die bei $t = 0$ durch p läuft (also $\gamma(0) = p$). In einer Umgebung von p haben wir nun eine Karte, die wir durch eine Funktion k darstellen, d. h. $k(\gamma(t))$ liefert für jedes t die reellen Koordinaten des Punktes $\gamma(t)$, und insgesamt ist $k(\gamma(t))$ eine Kurve im \mathbb{R}^n .



Definition des Tangentialraums:

$$\gamma'(0) = \{ \tilde{\gamma}(t) \mid \left. \frac{d}{dt} (k \circ \tilde{\gamma}(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} (k \circ \gamma(t)) \right|_{t=0} \} \quad T_p(M) = \{ \gamma'(0) \mid \gamma(0) = p \}$$

Benutzt man diese Definition, so kann man den Kotangentialraum über die Linearformen erhalten.

Ansonsten kann man über das soeben gezeigte Transformationsverhalten und die Kettenregel die Kotangentialvektoren auch ohne Bezug auf kartesische Koordinaten wie folgt definieren:

$$N_i = \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} \Rightarrow \overline{N}_j = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} N_i = \frac{\partial x^i}{\partial q^j} \frac{\partial \lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \lambda}{\partial q^j}$$

Beispiel: Polarkoordinaten $q_1 = r = \text{const.}$. Beschreibt einen Kreis mit Radius r in

Polarkoordinaten. Der Kurvenparameter t ist hier der Winkel. Die Komponenten des Tangentialvektors sind dann:

$$T^1 = \frac{dr}{dt} = 0$$

$$T^2 = \frac{d\varphi}{d\varphi} = 1$$

Achtung: Wir haben nur die Komponenten des Tangentialvektors in Polarkoordinaten berechnet. Dies reicht aber nicht aus, um den Tangentialvektor zu berechnen. Dazu benötigen wir noch die Basisvektoren in jedem Punkt des Kreises. Dies wird dann wichtig, wenn man die Änderung eines Vektors ausrechnet. Es reicht nicht aus, die Änderung der Komponenten auszurechnen, sondern man muss auch die Änderung der Basisvektoren mit einbeziehen. Dies ist insbesondere wichtig, wenn man Vektorfelder ableiten will. Dazu benötigt man den Begriff der kovarianten Ableitung.

Fährt man in einem Auto eine kurvenreiche Strecke, dann ist das Lenkrad des Autos zum Glück immer an derselben Position. Das Auto ist das Koordinatensystem, auf das sich alles im Auto bezieht, und darin ändern sich die Komponenten der Gegenstände nicht, die im Auto vorhanden sind. Allerdings bekommt man schon mit, dass sich die Basisvektoren des Autos ändern müssen, wenn man sehr schnell in eine Kurve fährt. Die entsprechenden Änderungen verursachen eine Änderung des Geschwindigkeitsvektors, der dann eine Beschleunigung bewirkt, die entsprechend eine Kraft auf den Körper des Autofahrers ausübt. Es wäre also unsinnig, die Geschwindigkeit nur auf das mitgeführte Koordinatensystem im Auto zu beziehen, denn die muss sich laut Tacho nicht ändern, obwohl man mit großer Kraft gegen die Wagentür gedrückt wird.

3.5. Tensoren

Ein Tensor 0. Stufe ist ein Skalar, der unabhängig von den Koordinaten des Punktes ist, die ihn beschreiben. Zum Beispiel ein Temperaturfeld.

Ein Tensor 1. Stufe ist ein Vektor mit dem entsprechenden Transformationsverhalten bei Koordinatenwechsel der Vektorkomponenten:

$$r_j = \frac{\partial q^i}{\partial r^j} a_i$$

oder

$$r^j = \frac{\partial r^j}{\partial q^i} a^i$$

Als Beispiel kann man die Komponenten eines Tangentialvektors nehmen:

$$\hat{T}^j = \frac{\partial \hat{q}^j}{\partial q^i} T^i = \frac{\partial \hat{q}^j}{\partial q^i} T^i = \frac{\partial \hat{q}^j}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} = \frac{d\hat{q}^j}{dt}$$

Ein Tensor 2. Stufe ist ein Vektor (bezogen auf das Vektorprodukt) mit dem entsprechenden Transformationsverhalten bei Koordinatenwechsel:

$$\hat{a}_{kl} = \frac{\partial q^i}{\partial r^k} \frac{\partial q^j}{\partial r^l} t_{ij}$$

oder

$$\hat{a}^{kl} = \frac{\partial r^k}{\partial q^i} \frac{\partial r^l}{\partial q^j} t^{ij}$$

Beispiel: Wir sind jetzt in der Lage, über die Koordinatentransformationen die Komponenten des Metriktensors auszurechnen. Dazu betrachten wir die kartesischen Koordinaten

$x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$. Die Komponenten des Metriktensors sind dann durch die

Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben. Wollen wir nun die Komponenten des Metriktensors in

Kugelkoordinaten ausrechnen, dann benötigen wir die Transformationsgleichung von Kugelkoordinaten in kartesischen Koordinaten. Sie lauten:

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$\begin{aligned}x^1 &= x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\x^2 &= y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\x^3 &= z = r \cdot \cos\theta\end{aligned}$$

Der Metriktensor in kartesischen Koordinaten $x^1=x, x^2=y, x^3=z$ ist die Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Kugelkoordinaten bezeichnen wir mit $r^1=r, r^2=\theta, r^3=\varphi$, damit sie zu der allgemeinen Transformationsgleichung kompatibel sind. Mit der allgemeinen Transformation $\hat{t}_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial r^k} \frac{\partial x^j}{\partial r^l} t_{ij}$ fallen alle Komponenten t_{ij} für $i \neq j$ weg, weil dies die Komponenten der Einheitsmatrix sind, sodass nur $\hat{t}_{kl} = \frac{\partial x^i}{\partial r^k} \frac{\partial x^i}{\partial r^l} t_{ii}$ übrig bleibt. Dies sind aber genau die Skalarprodukte, die wir schon berechnet hatten. Wir erhalten somit den Metriktensor in Kugelkoordinaten nur über die Transformationsgleichungen der Koordinatentransformation von Kugel- in kartesische Koordinaten.

3.6. Bogenlängen von Kurven und der Metriktensor

Hat man die Parametrisierung einer Kurve, dann kann man die Änderungen der Koordinaten durch den Ausdruck:

$$\Delta q^i = \frac{dq^i}{dt} \cdot \Delta t$$

berechnen.

Oder man stellt sie mit den kontravarianten Komponenten des Tangentialvektors

$$\Delta \vec{T} = \vec{T} \cdot \Delta t$$

oder in Vektorkomponenten

$$(\Delta T)^i = T^i \cdot \Delta t$$

dar. Das Skalarprodukt eines Vektors ist durch $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ gegeben. Schreibt man dies in Komponenten, so erhält man $|\vec{a}| = \sqrt{g_{ij} a^i a^j}$. Der Metriktensor bestimmt also die Länge eines Vektors bei allgemeinen Koordinaten. Der Betrag von $\Delta \vec{T}$ ist die Länge eines kleinen Kurvenstücks $\Delta \vec{s}$. Damit erhält man:

$$(\Delta s)^2 = |\Delta \vec{T}|^2 = g_{ij} \Delta T^i \Delta T^j = g_{ij} \Delta q^i \Delta q^j = g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{dq^j}{dt} (\Delta t)^2.$$

Im Grenzfall liefert das:

$$ds^2 = g_{ij} \cdot dq^i \cdot dq^j.$$

Das differentielle Linienelement ist also:

$$\Delta s = \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{dq^j}{dt}} \cdot \Delta t.$$

Damit ergibt sich die Bogenlänge einer Kurve durch Integration:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \cdot \frac{dq^j}{dt}} dt.$$

Hat man den Metriktensor, so hat man in einer Mannigfaltigkeit durch die Bogenlänge einer Kurve einen Abstandsbegriff. Wir bezeichnen eine Mannigfaltigkeit, auf der ein metrisches Tensorfeld g_{ij} definiert, ist als **Riemannsche Mannigfaltigkeit**, wenn die Bogenlänge durch obige Gleichung gegeben ist. Der Metriktensor legt die Riemannsche Metrik auf Mannigfaltigkeiten fest.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Man bezeichnet einen Raum als flach, wenn man lokale Koordinaten derart wählen kann, dass der Metriktensor konstante Komponenten erhält. Im anderen Fall ist der Raum gekrümmt. Hat man eine Koordinatentransformation, in der der Metriktensor konstant ist, dann kann man durch lineare Transformation auf Diagonalform bringen. In der Diagonalen stehen 1 und -1. Beim Euklidischen Raum kann man für geeignete Koordinaten den Metriktensor auf die Einheitsmatrix transformieren.

Die uns bekannten Metriktensoren beziehen sich alle auf einen Euklidischen Raum. Die obige Definition ist allerdings allgemeiner. Man kann damit auch andere Räume als Euklidische Räume beschreiben. Dies soll im nächsten Kapitel am flachen Minkowskiraum durchgeführt werden.

Wir betrachten eine zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit – eine Fläche im dreidimensionalen Raum. Diese Teilmannigfaltigkeit kann lokal durch zwei Koordinaten beschrieben werden. Hält man bei den Kugelkoordinaten z. B. den Radius r fest, dann erhält man die Kugeloberfläche als zweidimensionale Teilmannigfaltigkeit im Euklidischen Raum \mathbb{R}^3 mit den Koordinaten (θ, φ) . Man hat nun in jedem Punkt je zwei Basisvektoren, die den Tangentialraum aufspannen, oder die Tangentialebene, wenn man es geometrisch betrachtet. Man erhält als Metriktensor $\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \cdot \sin^2 \theta \end{pmatrix}$ mit einem konstanten r . Hier gibt es keine Koordinatentransformation, die diesen Metriktensor konstant macht. Es handelt sich hier um einen Metriktensor eines zweidimensionalen gekrümmten Raumes.

Betrachtet man Zylinderkoordinaten, dann erhält man als zweidimensionale Untermannigfaltigkeit die Zylindermantelfläche, wenn man r konstant hält. Damit ergibt sich der zweidimensionale Metriktensor: $\begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hier ist der Metriktensor konstant. Deshalb ist die Mantelfläche des Zylinders ein **flacher Raum**. Die Mantelfläche eines Zylinders kann man zu einer Rechtecksfläche abrollen. Zeichnet man dann auf die abgerollten Fläche ein rechtwinkliges Dreieck, dann bleibt das Dreieck rechtwinklig, wenn man die Fläche wieder aufrollt. Die geometrischen Eigenschaften auf der Mantelfläche eines Zylinders entsprechen denen im Euklidischen Raum.

Kapitel IV: Die kovariante Ableitung

4.1. Motivation

Man betrachtet ein skalares Feld wie z. B. ein Temperaturfeld. Dann ist die Temperatur in einem Punkt immer dieselbe, egal welche Koordinaten man nimmt, um diesen Punkt zu beschreiben:

$$\hat{\lambda}(\hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n) = \lambda(q^1, \dots, q^n) \quad .$$

Mit den Koordinatentransformationen:

$$q^i(\hat{q}^1, \dots, \hat{q}^n) \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Ableitung des Temperaturfeldes ergibt den Gradienten. Dies ist ein Vektor und er zeigt in Richtung der stärksten Temperaturänderung. Für die Komponenten des Gradienten ergibt sich Folgendes bei Koordinatenwechsel:

$$\frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{q}^j} = \frac{\partial \lambda}{\partial q^j} = \frac{\partial q^i}{\partial \hat{q}^j} \frac{\partial \lambda}{\partial q^i} \quad .$$

Der Gradient hat also das Transformationsverhalten eines Tensors 1. Stufe, oder die Ableitung eines skalaren Feldes ist ein Tensorfeld 1. Stufe.

Im nächsten Schritt betrachten wir ein Vektorfeld. Vektoren sind Tensoren 1. Stufe und wir können das Vektorfeld wieder bezüglich zweier Koordinaten \hat{q}^i und q^i darstellen. Dann hat man folgendes Transformationsverhalten für die Komponenten des Vektorfeldes:

$$\hat{a}_j = \frac{\partial q^i}{\partial \hat{q}^j} a_i \quad .$$

Wir wollen nun die Komponenten des Vektorfeldes ableiten, um zu überprüfen, ob die Ableitung ebenfalls das Transformationsverhalten eines Tensors 2. Stufe hat. Bei der Ableitung müssen wir die Produktregel verwenden, weil die a_i bzw. \hat{a}_j die Komponenten des Vektorfeldes von den Koordinaten q^i und \hat{q}^i abhängen, die den Punkt auf der Mannigfaltigkeit beschreiben, zu dem es einen eindeutigen Vektor mit den Komponenten a_i bzw. \hat{a}_j in den unterschiedlichen Koordinaten gibt. Die Komponenten des Vektors beziehen sich dabei auf die Basis des Tangentialraums, der wegen der unterschiedlichen Koordinaten auch unterschiedliche Basisvektoren hat.

$$\frac{\partial \hat{a}_j}{\partial \hat{q}^k} = \frac{\partial^2 q^i}{\partial \hat{q}^k \partial \hat{q}^j} a_i + \frac{\partial q^i}{\partial \hat{q}^j} \frac{\partial a_i}{\partial \hat{q}^k} = \frac{\partial q^i}{\partial \hat{q}^j} \frac{\partial q^l}{\partial \hat{q}^k} \frac{\partial a_i}{\partial q^l} + \frac{\partial^2 q^i}{\partial \hat{q}^k \partial \hat{q}^j} a_i \quad .$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Die 1. Ableitung ergibt also einen Teil, der sich so transformiert wie ein Tensor 2. Stufe (grün und dick hervorgehoben) plus einen Störterm (rot hervorgehoben). Die 1. Ableitung eines Vektorfeldes ist also kein Tensor. Um das Transformationsverhalten eines Tensors bei einer Ableitung eines Vektorfeldes zu erhalten, modifiziert man die Ableitung zur kovarianten Ableitung, die ein Transformationsverhalten eines Tensors hat. Dann kann man sagen, dass die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes ein Tensorfeld 2. Stufe ist.

4.2. Die kovariante Ableitung

Die kovariante Ableitung berücksichtigt nicht nur die Änderung der Komponenten eines Vektors – dies hatten wir bei der Ableitung eines Vektorfeldes gemacht – sondern auch die Änderung der Basisvektoren. Geht man von einem Punkt einer Mannigfaltigkeit zu einem anderen Punkt, dann ändern sich die Tangentialräume und damit die Vektorraumbasis, die den Tangentialraum in einem Punkt beschreiben. Dann kann man aber auch unterschiedliche Vektoren in den beiden Punkten haben, obwohl sich die Komponenten des Vektors nicht geändert haben, weil sich die Komponenten auf die unterschiedlichen Tangentialräume in den beiden Punkten beziehen. Auch der andere Fall ist möglich: Die Komponenten zweier Vektoren in den beiden Punkten sind unterschiedlich, aber die Vektoren sind gleich, weil sie sich auf unterschiedliche Tangentialräume beziehen. Dabei haben wir die Tangentialräume über die Koordinaten der Punkte der Mannigfaltigkeit mit einer Basis versehen.

$$\vec{a} = a^i \vec{g}_i$$

Zur lokalen Darstellung der Mannigfaltigkeit gehen wir einmal von kartesischen Koordinaten x^i mit den entsprechenden Basisvektoren $\vec{e}_i = \vec{e}^i$ aus. Darüber hinaus stellen wir die Mannigfaltigkeit lokal durch allgemeine Koordinaten dar: q^i mit den Basisvektoren \vec{g}_α und \vec{g}^α . Diese Vektoren liegen tangential an den Koordinatenlinien, die im allgemeinen Koordinaten krummlinig sind und keine Geraden wie in kartesischen Koordinaten.

Wir behandeln die kovariante Ableitung im Euklidisch Raum, sodass wir kartesische Koordinaten verwenden können. Die Verallgemeinerung erfolgt dann später.

Für den Vektor gilt $\vec{a} = x^i \vec{e}_i$ in kartesischen Koordinaten.

Für den Vektor gilt $\vec{a} = a^\alpha \vec{g}_\alpha$ für allgemeine Koordinaten.

Wir berechnen die Änderung von \vec{a} bezüglich der Koordinate q^y :

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial q^y} = \frac{\partial (a^\alpha \vec{g}_\alpha)}{\partial q^y} = \frac{\partial a^\alpha}{\partial q^y} \vec{g}_\alpha + a^\alpha \frac{\partial \vec{g}_\alpha}{\partial q^y}$$

Um die Änderung der Basisvektoren $\frac{\partial \vec{g}_\alpha}{\partial q^y}$ zu berechnen, weichen wir auf kartesische Koordinaten aus. Die Transformationen für die Basisvektoren sind wie folgt gegeben:

$$\vec{g}_\alpha = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \vec{e}_i \quad \vec{e}_i = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \vec{g}_\alpha$$

$$\vec{g}_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \vec{e}_i \quad \vec{e}_i = \frac{\partial q^\alpha}{\partial x^i} \vec{g}_\alpha$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$\frac{\partial \vec{g}_\alpha}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial}{\partial q^\gamma} \left(\frac{\partial x^i}{\partial q^\alpha} \vec{e}_i \right)$. Da die Basisvektoren im Euklidischen Raum nicht vom Punkt auf der Mannigfaltigkeit abhängen, benötigt man bei der Ableitung nicht die Produktregel:

$$\frac{\partial \vec{g}_\alpha}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^\gamma \partial q^\alpha} \vec{e}_i \quad .$$

Mit $\vec{e}_i = \frac{\partial q^\beta}{\partial x^i} \vec{g}_\beta$ erhält man dann den Ausdruck:

$$\frac{\partial \vec{g}_\alpha}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^\gamma \partial q^\alpha} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^i} \vec{g}_\beta \quad .$$

Wir haben damit die Änderung der Basisvektoren für allgemeine Koordinaten gefunden, ohne die Basisvektoren zu ändern.

Die Größen $\Gamma_{\gamma\alpha}^\beta = \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^\gamma \partial q^\alpha} \frac{\partial q^\beta}{\partial x^i}$ nennt man die **Christoffelsymbole**. Sie beschreiben die Änderung der Basisvektoren in allgemeinen Koordinaten. Es handelt sich **nicht** um einen Tensor 3. Stufe.

$$\frac{\partial \vec{g}_\alpha}{\partial q^\gamma} = \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \vec{g}_\beta$$

Für die Ableitung $\frac{\partial \vec{a}}{\partial q^\gamma} = \frac{\partial a^\beta}{\partial q^\gamma} \vec{g}_\beta + a^\alpha \frac{\partial \vec{g}_\alpha}{\partial q^\gamma}$ (hier wurde der Summationsindex zu obiger Ableitung von α nach β geändert) ergibt sich dann:

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial q^\gamma} = \left(\frac{\partial a^\beta}{\partial q^\gamma} + a^\alpha \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta \right) \vec{g}_\beta$$

Man bezeichnet diesen Ausdruck als die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektorfeldes. Für die Komponenten schreibt man:

$$a^\beta_{|\gamma} = \frac{\partial a^\beta}{\partial q^\gamma} + \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta a^\alpha$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial q^\gamma} = a^\beta_{|\gamma} \vec{g}_\beta$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Die kovariante Ableitung ist also ein Tensor 2. Stufe, da es sich um die Komponenten $a^\beta|_\gamma$ eines Vektors handelt.

Analog erhält man für die kovarianten Komponenten eine kovariante Ableitung für ein kovariantes Vektorfeld.

Man betrachtet den Skalar $S = v^\mu \cdot w_\mu$. Die Ableitung nach der Produktregel liefert:

$$\frac{\partial S}{\partial x^\rho} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\rho} \cdot w_\mu + \frac{\partial w_\mu}{\partial x^\rho} \cdot v^\mu$$

Den ersten Summanden kann man dann durch Addition der 0 wie folgt umschreiben:

$$\frac{\partial v^\mu}{\partial x^\rho} \cdot w_\mu = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\rho} \cdot w_\mu + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \cdot v^\mu \cdot w_\lambda - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \cdot v^\mu \cdot w_\lambda$$

Einsetzen liefert:

$$\frac{\partial S}{\partial x^\rho} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\rho} \cdot w_\mu + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \cdot v^\mu \cdot w_\lambda + \frac{\partial w_\mu}{\partial x^\rho} \cdot v^\mu - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \cdot v^\mu \cdot w_\lambda$$

Zum Schluss noch Ausklammern:

$$\frac{\partial S}{\partial x^\rho} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\rho} \cdot w_\mu + \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \cdot v^\mu \cdot w_\lambda + v^\mu \cdot \left(\frac{\partial w_\mu}{\partial x^\rho} - \Gamma_{\rho\mu}^\lambda \cdot w_\lambda \right)$$

Der rote Term definiert dann die kovariante Ableitung für ein kovariantes Vektorfeld. In der Terminologie von oben haben wir dann:

$$a_{\beta|_\gamma} = \frac{\partial a_\beta}{\partial q^\gamma} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \cdot a_\alpha$$

oder

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial q^\gamma} = a_{\beta|_\gamma} \vec{g}^\beta$$

Die kontravariante Ableitung von kontravariante Komponenten a^β entsteht durch Überschiebung mit dem kontravarianten Metriktensor:

$$a^{\beta|_\gamma} = a^\beta_{|\nu} \cdot g^{\nu\gamma}$$

Die kontravariante Ableitung von kovariante Komponenten a_β entsteht durch Überschiebung mit dem kontravarianten Metriktensor:

$$a^{\beta| \gamma} = a_{\beta| \nu} \cdot g^{\nu \gamma}$$

Zusammenfassung:

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^{\gamma} \partial q^{\alpha}} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial x^i}$$

| Komponenten | Kovariante Ableitung | Kontravariante Ableitung |
|---------------|---|--|
| Kontravariant | $a^{\beta \gamma} = \frac{\partial a^{\beta}}{\partial q^{\gamma}} + \Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta} a^{\alpha}$ | $a^{\beta \gamma} = a^{\beta}_{ \nu} \cdot g^{\nu \gamma}$ |
| Kovariant | $a_{\beta \gamma} = \frac{\partial a_{\beta}}{\partial q^{\gamma}} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \cdot a_{\alpha}$ | $a^{\beta \gamma} = a_{\beta \nu} \cdot g^{\nu \gamma}$ |

Leider haben die Christoffelsymbole noch Bezug auf die kartesischen Koordinaten. Wenn man aber eine Riemannsche Mannigfaltigkeit hat, bei der in jedem Punkt ein Metriktensor existiert, dann kann man die Christoffelsymbole auch mithilfe des kontravarianten Metriktensors ausrechnen:

$$\Gamma_{ab}^s = \frac{1}{2} g^{sr} \left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{br}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r} \right)$$

Damit kann man auch die kovariante Ableitung auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten definieren. In einem flachen Raum gibt es dann immer Koordinaten, in denen der Metriktensor konstant ist und damit die Christoffelsymbole 0 sind. Dann ist die Ableitung eines Vektors gleich der partiellen Ableitungen der Komponenten des Vektors. In einem gekrümmten Raum sind die Metriktensoren nicht konstant. Hier treten die Christoffelsymbole auf, weil man nicht durch eine Transformation der Koordinaten erreichen kann, dass der Metriktensor konstant wird.

Die Christoffelsymbole sind symmetrisch, weil der Metriktensor symmetrisch ist.

Man kann die kovariante Ableitung auch abstrakter definieren. Dabei geht man von den Eigenschaften der kovarianten Ableitung aus, die wir in Kapitel IV besprechen werden. Diese Definition kommt ohne Metriktensor aus und verallgemeinert damit den Begriff der kovarianten Ableitung auf differenzierbare Mannigfaltigkeiten¹⁰.

Eine Abbildung $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, $(X, s) \mapsto \nabla_X s$, die einem Vektorfeld X auf M (bei dem Vektorfeld X handelt es sich um ein Element aus $\Gamma(TM)$ und deshalb um einen Schnitt, der jedem

¹⁰ Siehe: [https://de.wikipedia.org/wiki/Zusammenhang_\(Differentialgeometrie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Zusammenhang_(Differentialgeometrie))

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Punkt $p \in M$ ein Element aus dem Tangentialraum $T_p(M)$ in p zuordnet) und einem Schnitt s im Vektorbündel E wieder einen Schnitt in E zuordnet, heißt **Zusammenhang**, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $\nabla_X s$ ist in $X \in \Gamma(TM)$ linear über $C^\infty(M)$, das heißt:
 $\nabla_{fX_1 + gX_2} s = f \cdot \nabla_{X_1} s + g \cdot \nabla_{X_2} s$ für $f, g \in C^\infty(M)$ und $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$.
- (ii) $\nabla_X s$ ist \mathbb{R} -linear in s , das heißt:
 $\nabla_X (\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) = \lambda_1 \cdot \nabla_X s_1 + \lambda_2 \cdot \nabla_X s_2$ für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- (iii) $\nabla_X (fs) = X(f) \cdot s + f \cdot \nabla_X s$ für jede Funktion $f \in C^\infty(M)$. Hier bezeichnet $X(f)$ die Richtungsableitung der Funktion f in Richtung X .
Tangentialvektoren werden also als Derivationen aufgefasst.

4.3 Beispiele

4.3.1 Die Christoffelsymbole

Wir wollen in den die Christoffelsymbole für spezielle dreidimensionale Koordinatensystem berechnen, bei denen die Metriktensoren Diagonalmatrizen sind. Dazu benutzen wir die Formel mit Hilfe der Metriktensoren:

$$\Gamma_{ab}^s = \frac{1}{2} g^{sr} \left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{br}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r} \right)$$

Nach der einsteinschen Summenkonvention ist $r=1, 2, 3$.

$$\Gamma_{ab}^s = \frac{1}{2} g^{s1} \left(\frac{\partial g_{a1}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b1}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^1} \right) + \frac{1}{2} g^{s2} \left(\frac{\partial g_{a2}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b2}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^2} \right) + \frac{1}{2} g^{s3} \left(\frac{\partial g_{a3}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b3}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^3} \right)$$

$$\Gamma_{ab}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{a1}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b1}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^1} \right) + \frac{1}{2} g^{12} \left(\frac{\partial g_{a2}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b2}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^2} \right) + \frac{1}{2} g^{13} \left(\frac{\partial g_{a3}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b3}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^3} \right)$$

$$\Gamma_{ab}^2 = \frac{1}{2} g^{21} \left(\frac{\partial g_{a1}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b1}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^1} \right) + \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{a2}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b2}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^2} \right) + \frac{1}{2} g^{23} \left(\frac{\partial g_{a3}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b3}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^3} \right)$$

$$\Gamma_{ab}^3 = \frac{1}{2} g^{31} \left(\frac{\partial g_{a1}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b1}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^1} \right) + \frac{1}{2} g^{32} \left(\frac{\partial g_{a2}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b2}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^2} \right) + \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{a3}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b3}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^3} \right)$$

$$\Gamma_{ab}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{a1}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b1}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^1} \right) \quad \Gamma_{ab}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{a2}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b2}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^2} \right)$$

$$\Gamma_{ab}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{a3}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b3}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^3} \right)$$

Ein entsprechendes Ergebnis erhält man für Metriktensoren im zweidimensionalen Fall:

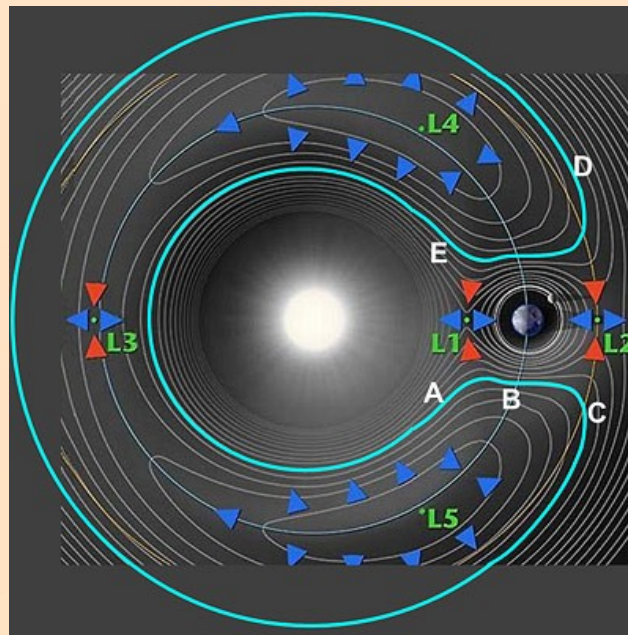
$$\Gamma_{ab}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{a1}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b1}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^1} \right) \quad \Gamma_{ab}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{a2}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b2}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^2} \right)$$

In den beiden folgenden Tabellen sind die entsprechenden Ergebnisse für die Christoffelsymbole in bestimmten Koordinaten zusammengestellt. (Ich hoffe, dass ich mich bei den Kugelkoordinaten

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

bezüglich der Christoffelsymbole nicht verrechnet habe, weil ich in einer Arbeit ein anderes Ergebnis gefunden habe.)

| Koordinatensystem | Kovarianter metrischer Tensor | Kontravarianter metrischer Tensor | Christoffelsymbole |
|---|---|---|---|
| Polarkoordinaten $(q^1, q^2) = (r, \varphi)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}$ | $\Gamma_{ab}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{a1}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b1}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^1} \right)$ $\Gamma_{ab}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{a2}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b2}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^2} \right)$ |
| Kugelkoordinaten $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, \varphi)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cdot \sin^2 \theta \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$ | $\Gamma_{ab}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{a1}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b1}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^1} \right)$ $\Gamma_{ab}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{a2}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b2}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^2} \right)$ |
| Zylinderkoordinaten $(q^1, q^2, q^3) = (r, \varphi, z)$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\Gamma_{ab}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{a3}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b3}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^3} \right)$ |



Schema eines Hufeisen-Orbits: Der Asteroid kreist innerhalb der Erdbahn und ist dadurch etwas schneller als die Erde. Beim Einholen wird er auf eine äußere Bahn gedrängt und verlangsamt dadurch seinen Flug, als Folge fällt er zurück. Quelle: NASA, gemeinfrei

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

| <i>Koordinaten</i> | <i>Christoffelsymbole</i> |
|----------------------------|--|
| <i>Polarkoordinaten</i> | $\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$ |
| <i>Kugelkoordinaten</i> | $\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{13}^1 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{23}^1 \\ \Gamma_{31}^1 & \Gamma_{32}^1 & \Gamma_{33}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r \sin^2 \theta \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{13}^2 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & \Gamma_{23}^2 \\ \Gamma_{31}^2 & \Gamma_{32}^2 & \Gamma_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^3 & \Gamma_{12}^3 & \Gamma_{13}^3 \\ \Gamma_{21}^3 & \Gamma_{22}^3 & \Gamma_{23}^3 \\ \Gamma_{31}^3 & \Gamma_{32}^3 & \Gamma_{33}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & \cot \theta \\ \frac{1}{r} & \cot \theta & 0 \end{pmatrix}$ |
| <i>Zylinderkoordinaten</i> | $\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{13}^1 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{23}^1 \\ \Gamma_{31}^1 & \Gamma_{32}^1 & \Gamma_{33}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{13}^2 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & \Gamma_{23}^2 \\ \Gamma_{31}^2 & \Gamma_{32}^2 & \Gamma_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^3 & \Gamma_{12}^3 & \Gamma_{13}^3 \\ \Gamma_{21}^3 & \Gamma_{22}^3 & \Gamma_{23}^3 \\ \Gamma_{31}^3 & \Gamma_{32}^3 & \Gamma_{33}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

4.3.2 Kovariante Ableitung eines parallelen Vektorfeldes in Polarkoordinaten

Wir wollen in diesem Beispiel zeigen, dass die kovariante Ableitung des parallelen Vektorfeldes $\vec{a} = \vec{e}_1$ in der Euklidischen Ebene auch in Polarkoordinaten verschwindet. Dazu müssen wir die Vektoren $\vec{a} = \vec{e}_1$ in jedem Punkt der Ebene durch Polarkoordinaten darstellen.

Es sei $x^1 = x = r \cos \varphi$ mit der Umkehrtransformation $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arctg(\frac{y}{x})$. Dazu benötigen wir die

Komponenten von \vec{e}_1 in Polarkoordinaten. Dabei seien \vec{g}_1, \vec{g}_2 die Basisvektoren im Punkt (r, φ) in Polarkoordinaten: $\vec{a} = \vec{e}_1 = a^1 \cdot \vec{g}_1 + a^2 \cdot \vec{g}_2$. Die Basisvektoren haben folgenden Zusammenhang:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial q^j}{\partial x^i} \vec{g}_j \quad \text{oder} \quad \vec{g}_i = \frac{\partial x^j}{\partial q^i} \vec{e}_j$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{r \cdot \cos \varphi}{r} = \cos \varphi \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{-r \cdot \sin \varphi}{r^2} = \frac{-\sin \varphi}{r}$$

Also: $\vec{e}_1 = \frac{\partial r}{\partial x} \vec{g}_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{g}_2 = \cos \varphi \cdot \vec{g}_1 - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \vec{g}_2$ und damit $\vec{a} = \cos \varphi \cdot \vec{g}_1 - \frac{\sin \varphi}{r} \cdot \vec{g}_2$.

Dem Vektorfeld sieht man an den Komponenten nicht mehr direkt an, dass es ein paralleles Vektorfeld ist. Wir wollen das mit der kovarianten Ableitung überprüfen:

$$a^\beta_{| \gamma} = \frac{\partial a^\beta}{\partial q^\gamma} + \Gamma^\beta_{\gamma \alpha} a^\alpha$$

Wir müssen $a^1_{|1}, a^1_{|2}, a^2_{|1}, a^2_{|2}$ mit $a^1 = \cos \varphi$ und $a^2 = \frac{-\sin \varphi}{r}$ und $q^1 = r, q^2 = \varphi$ berechnen.

$$a^1_{|1} = \frac{\partial \cos \varphi}{\partial r} + \Gamma^1_{1\alpha} a^\alpha \quad \text{und} \quad a^2_{|1} = \frac{\partial \frac{-\sin \varphi}{r}}{\partial r} + \Gamma^2_{1\alpha} a^\alpha$$

$$a^1_{|2} = \frac{\partial \cos \varphi}{\partial \varphi} + \Gamma^1_{2\alpha} a^\alpha \quad a^2_{|2} = \frac{\partial \frac{-\sin \varphi}{r}}{\partial \varphi} + \Gamma^2_{2\alpha} a^\alpha$$

$$a^1_{|1} = \Gamma^1_{1\alpha} a^\alpha \quad a^1_{|2} = -\sin \varphi + \Gamma^1_{2\alpha} a^\alpha \quad a^2_{|1} = \frac{\sin \varphi}{r^2} + \Gamma^2_{1\alpha} a^\alpha \quad a^2_{|2} = \frac{-\cos \varphi}{r} + \Gamma^2_{2\alpha} a^\alpha$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} & \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^1_{21} & \Gamma^1_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Gamma^2_{11} & \Gamma^2_{12} \\ \Gamma^2_{21} & \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & 0 \end{pmatrix}$$

$$a^1_{|1} = 0 \quad a^1_{|2} = -\sin \varphi + \Gamma^1_{22} a^2 = -\sin \varphi - r \cdot \left(\frac{-\sin \varphi}{r} \right) = 0$$

$$a_{|1}^2 = \frac{\sin \varphi}{r^2} + \Gamma_{12}^2 a^2 = \frac{\sin \varphi}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{-\sin \varphi}{r} = 0 \quad a_{|2}^2 = \frac{-\cos \varphi}{r} + \Gamma_{21}^2 a^1 = \frac{-\cos \varphi}{r} + \frac{\cos \varphi}{r} = 0 \quad .$$



Bild: Wikipedia, XMM-Newton, ESA, NASA, gemeinfrei

"Schwarze Löcher sind keine ewigen Gefängnisse, wie wir immer angenommen haben. Wenn du das Gefühl hast, du bist in einem Schwarzen Loch gefangen, gib nicht auf. Es gibt einen Weg heraus", so machte Stephen Hawking erst kürzlich seinen Zuhörern Mut, als er in Harvard über die neusten Erkenntnisse zu seinem Lieblingsthema referierte.¹¹

11 Zitiert nach: <https://motherboard.vice.com/de/article/gv548x/stephen-hawking-hat-endlich-die-loesung-des-schwarze-loch-paradoxons-verraten> Christoffel-Symbole

4.3.3 Differenzialoperatoren in allgemeinen Koordinaten

1. Der Gradient:

$$(\text{grad } \lambda)_i = \nabla_i \lambda = \lambda_{|i} = \frac{\partial \lambda}{\partial q^i}$$

2. Die Divergenz:

$$\text{div } \vec{v} = \nabla_i v^i = v^i_{|i} = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \Gamma^i_{ij} v^j$$

Die skalaren Felder, die uns in diesem Zusammenhang interessieren, sind konservative Kraftfelder wie zum Beispiel das Gravitationsfeld oder das elektrische Feld, weil man dann diese Felder (Beschleunigungsfelder) mittels Potenzialen – also skalaren Feldern – beschreiben kann. Es gilt nämlich:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{r}) .$$

In der Divergenz stehen die Christoffelsymbole: Γ^i_{ij} für die gilt:

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial q^j} \quad \text{mit} \quad g = \det(g_{ij}) \quad ^{12}$$

Damit erhält man für die Divergenz folgenden Ausdruck:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial q^j} v^j \quad \text{oder durch Umbenennung der Indizes:}$$

$$\text{div } \vec{v} = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial q^i} v^i .$$

Mit der Produktregel kann man dafür auch schreiben:

$$\text{div } \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial q^i} (v^i \sqrt{-g})$$

Hat man ein skalares Feld, so kann man die Divergenz des Gradientenfelds mit $v^i = \frac{\partial \lambda}{\partial q^i}$ berechnen.

¹² Siehe: <http://itp1.uni-stuttgart.de/lehre/vorlesungen/rela2/ss2011/ARTGrundl.pdf>, S. 18

3. Die Rotation

$$(\text{rot } \vec{v})^i = \epsilon^{ijk} \nabla_j v_k = \epsilon^{ijk} v_{k|j} = \epsilon^{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial q^j} - \Gamma_{kj}^l v_l \right) = \epsilon^{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial q^j}$$


Das negative Vorzeichen ergibt sich aus der kontravarianten Ableitung. Aber ϵ^{ijk} ist antisymmetrisch in j und k und Γ_{kj}^l ist symmetrisch in j und k . Damit werden die Produkte $\epsilon^{ijk} \Gamma_{kj}^l$, über die summiert wird, ebenfalls 0 und damit:

$$(\text{rot } \vec{v})^i = \epsilon^{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial q^j}$$

Der Gradient und die Rotation enthalten in allgemeinen Koordinaten keine kovarianten oder kontravarianten Ableitungen. Nur bei der Divergenz müssen wir kovariant ableiten, um die richtigen Resultate in allgemeinen Koordinaten zu erhalten.

Differenziert man zweimal kovariant, so erhält man einen neuen Tensor, den Riemannschen Krümmungstensor, mit dem man überprüfen kann, ob der Raum gekrümmt oder flach ist. Diesen Tensor hat Einstein als Ausgangspunkt genommen, um ihn in einen Zusammenhang zum Energie-Impulstensor zu bringen. Es wird sich zeigen, dass der Energie-Impulstensor die Eigenschaft $T_{|j}^{ij} = 0$ hat. Darin spiegelt sich die Energie-Impulserhaltung wider. Allerdings benötigt man für den Zusammenhang zwischen den Riemannschen Krümmungstensor und den Energie-Impulstensor eine weitere wichtige Relation, um Energie-Impulstensor mit dem Krümmungstensor zu verknüpfen.

Beispiel für die Differenzialoperatoren in den Maxwell Gleichungen:



Und Gott sprach

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

...und es ward Licht

Bild: <http://pumping-physics.de/wp-content/uploads/2016/06/T-Shirt%C2%BBund-Gott-sprach....png>

4.4 Eigenschaften der kovarianten Ableitung

Die kovarianten Ableitungen eines Vektors haben wir wie folgt definiert:

$$a^i{}_{|r} = \frac{\partial a^i}{\partial q^r} + \Gamma_{rn}^i a^n \quad \text{bzw.} \quad a_{i|r} = \frac{\partial a_i}{\partial q^r} - \Gamma_{ir}^n a_n$$

Mit dieser Systematik kann man dann auch Tensoren höherer Stufe kovariant ableiten. Dabei wird einmal partiell abgeleitet und die Christoffelsymbole für jeden Index im Tensor gebildet. Achtung: Bei kovarianten Indizes wird abgezogen.

Beispiel:

$$a) \quad t^{ij}{}_{|r} = \frac{\partial t^{ij}}{\partial q^r} + \Gamma_{rn}^i t^{nj} + \Gamma_{rn}^j t^{in} \quad \text{bzw.} \quad t_{ij|r} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial q^r} - \Gamma_{ir}^n t_{nj} - \Gamma_{jr}^n t_{in}$$

$$b) \quad t^i{}_{j|r} = \frac{\partial t^i_j}{\partial q^r} + \Gamma_{rn}^i t_j^n - \Gamma_{jr}^n t_n^i$$

$$c) \quad t^{ij}{}_{k|r} = \frac{\partial t^{ij}_k}{\partial q^r} + \Gamma_{rn}^i t_k^{nj} + \Gamma_{rn}^j t_k^{in} - \Gamma_{kr}^n t_n^{ij}$$

Es gilt die Summen und die Produktregel für kovariante bzw. kontravariante Ableitungen. Dies zeigen wir hier nicht.

$$(a^i + b^i)_{|k} = a^i{}_{|k} + b^i{}_{|k}$$

$$(a^i b_j)_{|k} = b_j a^i{}_{|k} + a^i b_{j|k}$$

Mit der Produktregel und Regel R3: Indexshift $a^i = g^{ij} \cdot a_j$ oder $a_i = g_{ij} \cdot a^j$ kann man nun den Metriktensor kovariant ableiten.

Es ist $a_{r|k} = (g_{rs} \cdot a^s)_{|k} = a^s \cdot g_{rs|k} + a^s{}_{|k} \cdot g_{rs} = a^s \cdot g_{rs|k} + a_{r|k}$, woraus $(g_{rs})_{|k} = 0$ folgt.

Die kovarianten oder kontravarianten Ableitungen des Metriktensors sind 0.

4.5 Höhere kovariante Ableitungen – der Riemannsche Krümmungstensor

Wir berechnen die zweite kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektorfeldes mit kovarianten Komponenten a_i bezüglich der Koordinaten q^j .

1. Ableitung: $a_{i|j} = \frac{\partial a_i}{\partial q^j} - \Gamma_{i|j}^l a_l$ ist ein Tensor 2. Stufe, der nochmals abgeleitet wird.

$$t_{ij|k} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial q^k} - \Gamma_{i|k}^n t_{nj} - \Gamma_{j|k}^n t_{in} \quad \text{für} \quad t_{ij} = a_{i|j} \quad \text{liefert das die 2. Ableitung}$$

$$a_{i|j|k} = \frac{\partial a_{i|j}}{\partial q^k} - \Gamma_{i|k}^h a_{h|j} - \Gamma_{j|k}^h a_{i|h}$$

$$a_{i|j|k} = \frac{\partial}{\partial q^k} \left(\frac{\partial a_i}{\partial q^j} - \Gamma_{i|j}^l a_l \right) - \Gamma_{i|k}^h \left(\frac{\partial a_h}{\partial q^j} - \Gamma_{h|j}^l a_l \right) - \Gamma_{j|k}^h \left(\frac{\partial a_i}{\partial q^h} - \Gamma_{i|h}^l a_l \right)$$

$$a_{i|j|k} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial q^k \partial q^j} + a_l \left(\Gamma_{j|k}^h \cdot \Gamma_{i|h}^l + \Gamma_{i|k}^h \cdot \Gamma_{h|j}^l - \frac{\partial \Gamma_{i|j}^l}{\partial q^k} \right) - \Gamma_{i|j}^l \frac{\partial a_l}{\partial q^k} - \Gamma_{i|k}^h \frac{\partial a_h}{\partial q^j} - \Gamma_{j|k}^h \frac{\partial a_i}{\partial q^h}$$

Die rot markierten Terme sind symmetrisch in j und k.

$$a_{i|j|k} - a_{i|k|j} = a_l \left(\frac{\partial \Gamma_{i|k}^l}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma_{i|j}^l}{\partial q^k} + \Gamma_{i|k}^h \cdot \Gamma_{h|j}^l - \Gamma_{i|j}^h \cdot \Gamma_{h|k}^l \right)$$

Der Term in der Klammer ist ein Tensor, weil die linke Seite der Gleichung ein Tensor ist und a_l ebenfalls ein Tensor ist. Damit können wir den Riemannschen Krümmungstensor als antisymmetrischen Anteil der zweiten kovarianten Ableitung eines Vektorfeldes definieren:

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{i|k}^l}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma_{i|j}^l}{\partial q^k} + \Gamma_{i|k}^h \cdot \Gamma_{h|j}^l - \Gamma_{i|j}^h \cdot \Gamma_{h|k}^l$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Ist der Riemannsche Raum flach, dann ist der Metriktenor konstant. Dann sind die Christoffelsymbole 0 und damit ist der Riemannsche Krümmungstensor ebenfalls 0. Ist umgekehrt der Riemannsche Krümmungstensor 0, dann kann man ein Koordinatensystem finden, in dem der Metriktenor konstant ist. Dann ist der Raum flach, weil der Metriktenor dann bezüglich einer beliebigen Koordinatentransformation in ein anderes Koordinatensystem konstant bleibt. Der Riemannsche Krümmungstensor ist also genau dann 0, wenn der Riemannsche Raum flach ist.



Abbildung: Lokale Koordinaten einer zweidimensionalen Fläche als Schattenwurf eines Kunstobjekts, Berlinische Galerie, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Kapitel V Geometrische Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

5.1 Die Eigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors

a) Der Riemannsche Metriktenor hat folgende Symmetrieeigenschaften:

$$s1: R_{li\,jk} = R_{jk\,li}$$

$$s2: R_{li\,jk} = -R_{il\,jk}$$

$$s3: R_{li\,jk} = -R_{li\,kj}$$

$$s4: R_{lijk} + R_{ljki} + R_{lkij} = 0$$

Mit diesen Symmetrien erhält man für den Riemannschen Krümmungstensor insgesamt $\frac{n^2 \cdot (n^2 - 1)}{12}$ unabhängige Komponenten. Das sind für $n = 4$ insgesamt 20 unabhängige Komponenten.

b) Riemannscher Krümmungstensor für kontravariante Komponenten a^i

$$\begin{aligned} a^i_{|j|k} - a^i_{|k|j} &= a^l R^i_{l\,jk} \\ a^i_{|j|k} - a^i_{|k|j} &= a^l R^i_{l\,jk} \\ a^i_{|j|k} - a^i_{|k|j} &= -a^l R^l_{i\,jk} \end{aligned}$$

c) Die Bianchi-Identitäten beziehen sich auf die kovariante Ableitung des Riemannschen Krümmungstensors. Sie sind schwierig herzuleiten, aber entstehen einfach aus der zyklischen Vertauschung der Indizes. Deshalb geben wir nur das Ergebnis an:

$$R^m_{nij|k} + R^m_{nj|ki} + R^m_{nki|j} = 0$$

Der Riemannsche Krümmungstensor und die Bianchi-Identitäten sind der Schlüssel zu den einsteinschen Feldgleichungen.

Für die Feldgleichungen definiert man den symmetrischen Ricci-Tensor, der durch Verjüngung des Riemannschen Krümmungstensors entsteht: $R_{ij} = R^s_{isj}$ und den Ricci-Skalar, der nochmals durch Verjüngung des Ricci-Tensors entsteht: $R = R^s_s$. Der Ricci-Tensor ist symmetrisch, denn mit **S1** gilt: $R_{ij} = R^s_{isj} = R^s_{si\,j} = R^s_{jsi} = R_{ji}$. Für die Herleitung des Einsteintensors

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

benötigen wir die Regeln für Tensoren und die Symmetrieeigenschaften des Riemannschen Krümmungstensor, um die Bianchi-Identität umzuformen.

R1: Austausch der Indizes: $X^j \cdot \delta_j^k = X^k$ mit dem Summationsindex j und den freien Index k .
Analog dazu hat man im dualen Fall: $X_j \cdot \delta_k^j = X_k$.

R2: Tensorverjüngung: Indem man einen kovarianten und kontravarianten Index gleichsetzt, erhält man einen Tensor zwei Stufen weniger: $a_i^i = a_{kl}^{kl}$.

R3: Indexshift mittels Metriktensor: $a^i = g^{ij} \cdot a_j$ oder $a_i = g_{ij} \cdot a^j$

$$S1: R_{li\ jk} = R_{jk\ li}$$

$$S2: R_{li\ jk} = -R_{il\ jk}$$

$$S3: R_{li\ jk} = -R_{li\ kj}$$

$$S4: R_{lij\ k} + R_{l\ jki} + R_{lkij} = 0$$

Die Multiplikation der Bianchi-Identität $R_{nij\ k}^m + R_{nj\ k\ i}^m + R_{nki\ j}^m = 0$ mit δ_m^i (R1) liefert:
 $R_{nij\ k}^i + R_{nj\ k\ i}^i + R_{nki\ j}^i = 0$.

Zweifacher Indextausch nach S2 und S3 in $R_{nij\ k}^i + R_{nj\ k\ i}^i + R_{nki\ j}^i = 0$ ergibt:

$$R_{nij\ k}^i + R_{n\ kj\ i}^i + R_{nki\ j}^i = 0$$

Indextausch nach S3 in $R_{nij\ k}^i + R_{n\ kj\ i}^i + R_{nki\ j}^i = 0$:

$$R_{nij\ k}^i + R_{n\ kj\ i}^i - R_{nik\ j}^i = 0$$

Aus $R_{nij\ k}^i + R_{n\ kj\ i}^i - R_{nik\ j}^i = 0$ ergibt sich durch Tensorverjüngung:

$$R_{nj\ k} + R_{n\ kj\ i}^i - R_{nk\ j} = 0$$

Multiplikation der Gleichung $R_{nj\ k} + R_{n\ kj\ i}^i - R_{nk\ j} = 0$ mit g^{nk} :

$$R_{j\ k}^k + R_{kj\ i}^{ki} - R_{k\ j}^k = 0$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Tensorverjüngung in $R^k_{j|k} + R^{ki}_{k|j} - R^k_{k|j} = 0$ liefert:

$$R^k_{j|k} + R^i_{j|i} - R^k_{k|j} = 0$$

Umbenennen der Indizes in $R^k_{j|k} + R^i_{j|i} - R^k_{k|j} = 0$ liefert:

$$R^i_{j|i} + R^i_{j|i} - R^k_{k|j} = 0 \quad \text{oder} \quad 2 \cdot R^i_{j|i} - R^k_{k|j} = 0$$

Austausch der Indizes $2 \cdot R^i_{j|i} - R^k_{k|j} = 0$ liefert:

$$2 \cdot R^i_{j|i} - \delta^i_j R^k_{k|i} = 0 \quad \text{oder} \quad \left(R^i_j - \frac{1}{2} \delta^i_j R \right)_{|i} = 0$$

Man betrachtet: $R^i_j - \frac{1}{2} \delta^i_j R$ und multipliziert mit g_{ik} :

$$R_{kj} - \frac{1}{2} g_{jk} R$$

Wegen der Symmetrie des Ricci-Tensors gilt: $R_{jk} - \frac{1}{2} g_{jk} R$ Man nennt diesen Tensor den Einsteintensor.

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$$



Abbildung: Raumkrümmung durch eine Masse zweidimensional, Berlinische Galerie, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Der Einsteintensor hat wegen $\left(R^i_j - \frac{1}{2} \delta^i_j R \right)_{|i} = 0$ keine Divergenz.

5.2 Die Einsteinsche Feldgleichung

Die Krümmung der vierdimensionalen Raumzeit wird durch die Massen- und Energiedichte und den Impuls der Materie bewirkt. Die Materie wirkt auf die Raumzeit, und die Raumzeit sowie ihre Geometrie wirkt sich auf die Bewegung der Materie aus. Der vierdimensionale Energie-Impulstensor beschreibt die Massen- und Energiedichte und den Impuls der Materie. Es gilt die Energieerhaltung und die Impulserhaltung. Damit hat der Energie-Impulstensor gewisse Symmetrieeigenschaften: $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. Darüber hinaus muss die Divergenz des Energie-Impulstensors 0 sein. Einstein konnten dann folgende Beziehung nachweisen:

$$G_{\nu\mu} = \kappa \cdot T_{\nu\mu}$$

$$\kappa = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4}$$

Dabei ist c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit und G die Gravitationskonstante.

Bemerkung: Den einsteinschen Feldgleichungen kann man eine weitere Konstante Λ hinzufügen:

$$G_{\nu\mu} + \Lambda \cdot g_{\nu\mu} = \kappa \cdot T_{\nu\mu} .$$

Man nennt Λ die kosmologische Konstante. Ursprünglich sollte mit der Konstanten ein stabiles Universum möglich sein. Allerdings ist man heute auf den Stand, dass die Ausdehnungsgeschwindigkeit des Universums eine beschleunigte Expansion ist. Die Interpretation der Beschleunigung erfolgt über die dunkle Energie. Daneben soll es auch eine dunkle Materie geben, die die Umlaufgeschwindigkeiten von Zwerggalaxien um das Galaxiezentrum erklären.

Da die Gravitationskonstante und die Lichtgeschwindigkeit bei den einsteinschen Feldgleichungen eine normierende Rolle spielen, ähneln sie der normierenden Rolle in dem Newtonschen Gravitationsgesetz. G macht aus dem Ausdruck $\frac{m}{r^2}$ eine Beschleunigung. Die physikalische

Dimension von G ist also $\left[\frac{m^3}{kg \cdot s^2}\right]$ oder mit der homogenen Massendichte $\rho = \frac{m}{V} \left[\frac{kg}{m^3}\right]$ dann entsprechend:

$$G = \frac{1}{\rho s^2} .$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Inwieweit es sich hierbei wirklich um eine konstante physikalische Skalierungsgröße handelt, konnte bis heute noch nicht nachgewiesen werden. Dazu bedarf es sehr genauer Messungen der Gravitationskonstanten, die allerdings noch ausstehen.

Eine andere Formulierung der einsteinschen Feldgleichungen ohne kosmologische Konstante erhält man wie folgt:

Man betrachtet die einsteinsche Feldgleichung in der Form:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot R \cdot g_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{ij} \quad .$$

Multiplikation mit g^{ij} liefert:

$$R - \frac{1}{2} \cdot R \cdot 4 = -\frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_j^j = -\frac{8\pi G}{c^4} \cdot T \quad , \text{ da } g^{ij} g_{ij} = \delta_j^j = 4 \text{ ist.}$$

Also:

$$-R = -\frac{8\pi G}{c^4} \cdot T$$

und damit in die einsteinsche Feldgleichung eingesetzt:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T \cdot g_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{ij} \quad .$$

Auflösen nach R_{ij} ergibt für den Ricci-Tensor:

$$R_{ij} = -\frac{8\pi G}{c^4} \cdot T_{ij} + \frac{1}{2} \cdot \frac{8\pi G}{c^4} \cdot T \cdot g_{ij}$$

oder

$$\mathbf{R_{ij}} = -\frac{8\pi G}{c^4} \cdot \left(T_{ij} - \frac{T}{2} \cdot g_{ij} \right) \quad .$$

5.3 Nachtrag

5.3.1 Geodätische Linien

Bisher hatten wir die Änderungen eines skalaren oder eines Vektorfeldes entlang der Koordinatenlinien berechnet und folgende Ergebnisse erhalten:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q^i} = \lambda_{|i}$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial q^i} = a^j_{|i} \cdot \vec{g}_j$$

$$\frac{\partial \vec{a}}{\partial q^i} = a_i{}_{|i} \cdot \vec{g}^i$$

Wir wollen nun die Änderungen entlang einer Kurve c in der n -dimensionalen Mannigfaltigkeit berechnen, die folgende Parameterdarstellung hat: $q^i = q^i(t)$. Die Variable t ist der Kurvenparameter – also nicht notwendigerweise die Zeit.

Die Änderung eines skalaren Feldes entlang der Kurve c :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \frac{\partial \lambda}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial t} = \lambda_{|i} \cdot \frac{dq^i}{dt}$$

Die Änderung eines Vektorfeldes entlang einer Kurve c :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{a}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial t} = a^j_{|i} \cdot \vec{g}_j \frac{\partial q^i}{\partial t} \\ \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} &= \frac{\partial \vec{a}}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial t} = a_j{}_{|i} \cdot \vec{g}^j \frac{\partial q^i}{\partial t} \end{aligned}$$

Wir definieren eine absolute Ableitung des Vektorfeldes längs einer Kurve c :

$$\frac{D a^j}{D t} = a^j_{|i} \frac{\partial q^i}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad \frac{D a_j}{D t} = a_j{}_{|i} \frac{\partial q^i}{\partial t} .$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{D a^j}{Dt} \vec{g}_j \quad \text{bzw.} \quad \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{D a_j}{Dt} \vec{g}^j$$

Sei \vec{a} der Tangentialvektor \vec{T} an eine Kurve c , d. h. $T^i = \frac{dq^i}{dt}$.

$$\frac{DT^i}{Dt} = T^i_{;n} \frac{dq^n}{dt} = \left(\frac{\partial T^i}{\partial q^n} + \Gamma_{mn}^i T^m \right) \frac{dq^n}{dt} = \frac{dT^i}{dt} + \Gamma_{mn}^i T^m \frac{dq^n}{dt} = \frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{mn}^i \frac{dq^m}{dt} \frac{dq^n}{dt}. \quad \text{Damit ist}$$

$$\frac{DT^i}{Dt} = \frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{mn}^i \frac{dq^m}{dt} \frac{dq^n}{dt}.$$

Die Länge des Tangentialvektors ist $|\vec{T}| = \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt}}$. Für die Bogenlänge erhält man:

$$s = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt}} dt \Rightarrow ds = \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt}} dt \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt}}. \quad \text{Damit ist für } t=s \text{ oder } dt=ds \text{ die Länge des Tangentialvektors } T \text{ gleich 1.}$$

Daraus kann man den Hauptnormalenvektor definieren: $N^i = \frac{DT^i}{Ds} = \frac{D}{Ds} \frac{dq^i}{ds}$. Dieser Vektor steht senkrecht auf der Kurve und beschreibt die Krümmung der Kurve.

$$N^i = \frac{DT^i}{Ds} = \frac{d^2 q^i}{ds^2} + \Gamma_{mn}^i \frac{dq^m}{ds} \frac{dq^n}{ds}$$

Die geodätische Krümmung der Kurve c ist durch:

$$\kappa = \sqrt{g_{ij} N^i N^j}$$

Eine geodätische Linie auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit ist eine Kurve, auf der sich die absolute Ableitung der Tangentialvektoren nicht ändert.

$$\frac{DT^i}{Dt} = 0$$

$$\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{mn}^i \frac{dq^m}{dt} \frac{dq^n}{dt} = 0$$

Dies ist die Differenzialgleichung der geodätischen Linien. Man kann zeigen, dass jede Verbindungskurve zweier Punkte in der betrachteten Riemannschen Mannigfaltigkeit, deren Länge ein Extremwert annimmt, eine geodätische Linie ist. Die Lösung obiger Differenzialgleichung erfüllt diese Eigenschaft.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

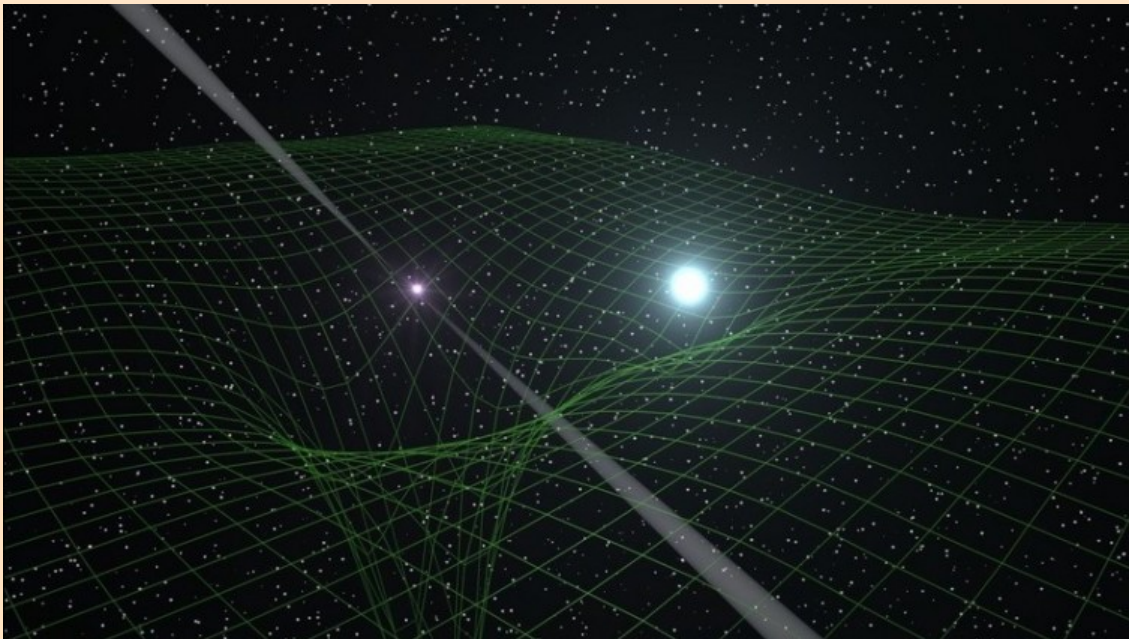
In physikalischen Anwendungen ist t die Zeit. Die Geschwindigkeit ist tangential zur Kurve. Dies ist nun auch für die Riemannschen Mannigfaltigkeiten definiert, obwohl man keinen Ortsvektor hat, sondern nur Ortskoordinaten. $v^i = \frac{dq^i}{dt}$ sind die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors. Bei der Beschleunigung \vec{a} geht es um die Änderung der Geschwindigkeit, und dies ist die absolute Änderung des Geschwindigkeitsvektors:

$$a^i = \frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{mn}^i \frac{dq^m}{dt} \frac{dq^n}{dt} .$$

Damit kann man Bewegungsgleichungen aufstellen, analog zum Newtonschen Aktionsprinzip:

$$m \cdot a^i = F^i$$

Das F^i ist allerdings nicht die Gravitationskraft, weil diese durch die Feldgleichungen beschrieben wird. Wirkt aber nur die Gravitation, dann ist $F^i = 0$, und die Körper werden sich auf geodätischen Bahnen bewegen. Hier handelt es sich um beschleunigungsfreie Bahnen. Die Feldgleichungen ergeben eine vierdimensionale Raumzeit. Dort bewegen sich die Massen auf beschleunigungsfreien Bahnen. (**Äquivalenzprinzip:** Im freien Fall, nur unter Einwirkung der Gravitation, kann man nicht unterscheiden, ob man schwerelos im Gravitationsfeld frei fällt oder ohne Einwirkung der Gravitation schwerelos ist.)



Beispiel für eine Raumkrümmung am Pulsar PSR J0348+0432 (dpa/Max-Planck-Institut für Radioastronomie, Bonn), Quelle:

https://www.deutschlandfunk.de/media/thumbs/b/bbc8ba3f01e9f3743a27576e82edb583v1_max_755x425_b3535db83dc50e27c1bb1392364c95a2.jpg?key=ea742c

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Beispiel: Die Krümmung eines Weges wird im Skript über die kovariante Ableitung des Hauptnormalen Vektorfeldes an eine Kurve, die nach der Bogenlänge parametrisiert ist, definiert, und mittels $\kappa = \sqrt{g_{ij} N^i N^j}$ berechnet.

Dabei sind die N^i für eine Kurve: $c=(q^1(s), q^2(s), q^3(s))$ durch $N^i = \frac{d^2 q^i}{ds^2} + \Gamma_{mn}^i \frac{dq^m}{ds} \frac{dq^n}{ds}$ gegeben.

Nimmt man den metrischen Tensor in Kugelkoordinaten $(q^1, q^2, q^3) = (r, \theta, \varphi)$

$$(g_{nm}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \cdot \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

erhält man für die Krümmung:

$$\kappa = \sqrt{N^1 N^1 + r^2 N^2 N^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot N^3 N^3}$$

Für die Berechnung der N^i benutzt man die Christoffelsymbole auf Seite 70 des Skripts:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 & \Gamma_{12}^1 & \Gamma_{13}^1 \\ \Gamma_{21}^1 & \Gamma_{22}^1 & \Gamma_{23}^1 \\ \Gamma_{31}^1 & \Gamma_{32}^1 & \Gamma_{33}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & -r \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^2 & \Gamma_{12}^2 & \Gamma_{13}^2 \\ \Gamma_{21}^2 & \Gamma_{22}^2 & \Gamma_{23}^2 \\ \Gamma_{31}^2 & \Gamma_{32}^2 & \Gamma_{33}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma_{11}^3 & \Gamma_{12}^3 & \Gamma_{13}^3 \\ \Gamma_{21}^3 & \Gamma_{22}^3 & \Gamma_{23}^3 \\ \Gamma_{31}^3 & \Gamma_{32}^3 & \Gamma_{33}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & \cot \theta \\ \frac{1}{r} & \cot \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Nimmt man die Koordinaten eines Großkreises parametrisiert durch die Bogenlänge s:

$$(q^1, q^2, q^3) = (r, \frac{s}{r}, \varphi) \quad , \text{ so sieht man, dass } N^2 = N^3 = 0 \text{ ist. Für } N^1 \text{ bleibt nur } N^1 = \Gamma_{22}^1 \frac{dq^2}{ds} \frac{dq^2}{ds}$$

also $N^1 = -r \frac{1}{r} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r}$ übrig. Damit ist die Krümmung durch $\kappa = \sqrt{\frac{1}{r^2}} = \frac{1}{r}$ gegeben.

5.3.2 Parallele Vektoren

Ein Vektorfeld, bei dem die absolute Ableitung entlang einer Kurve 0 ist, nennt man Parallelfeld.

$$\frac{Da^i}{Dt} = 0$$

Man spricht auch von einer Parallelverschiebung eines Vektors entlang einer Kurve oder einem Paralleltransport. An jedem Punkt der Kurve c hat der parallel verschobene Vektor immer dieselbe

Länge: $\frac{d}{dt}|\vec{a}| = \frac{d}{dt}(a^i a_i) = \frac{d a^i}{dt} a_i + a^i \frac{d a_i}{dt} = \frac{D a^i}{Dt} a_i + a^i \frac{D a_i}{Dt} = 0$.

An jedem Punkt der Kurve c schließen zwei parallel verschobene Vektoren denselben Winkel ein:

$$\frac{d}{dt}(a^i b_i) = \frac{d a^i}{dt} b_i + a^i \frac{d b_i}{dt} = \frac{D a^i}{Dt} b_i + a^i \frac{D b_i}{Dt} = 0$$
 . Also ist das Skalarprodukt ebenfalls konstant und damit mit dem Ergebnis von oben ergibt sich, dass der Winkel ebenfalls konstant ist.

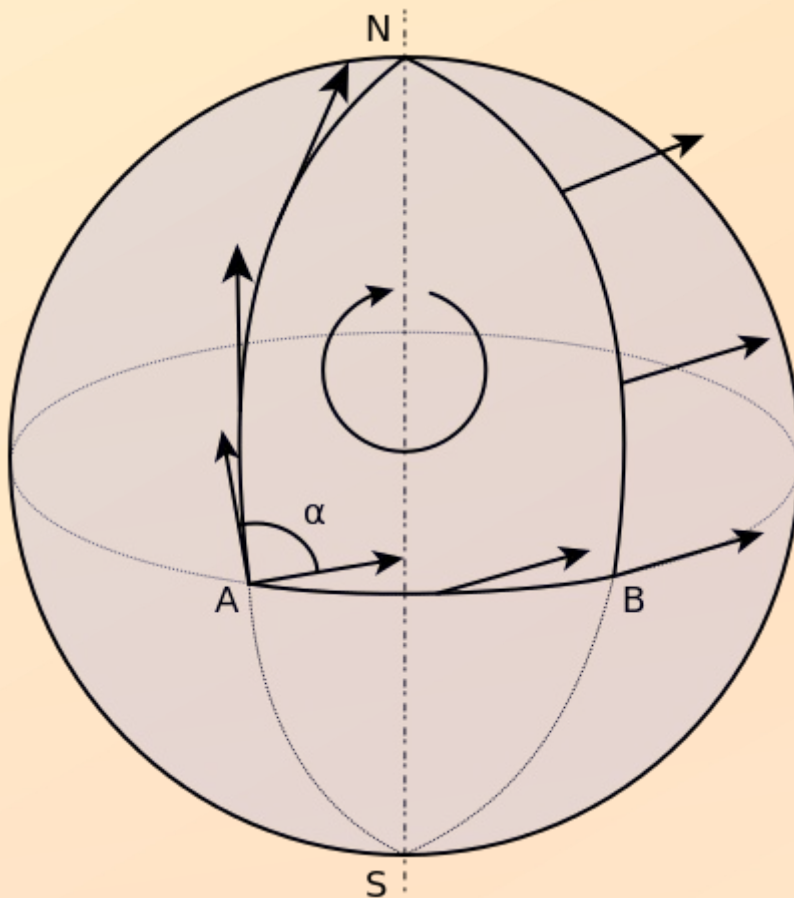
Bei geodätischen Linien ist der Tangentialvektor ein parallel verschobener Vektor. Längs einer geodätischen Linie hat ein parallel verschobener Vektor immer denselben Winkel zum Tangentialvektor.

Die Änderungen der Vektorkomponenten a^i bei Parallelentransport um δt ergibt sich durch:

$$\delta a^i \approx -\Gamma_{lj}^i a^l \cdot \frac{dq^j}{dt} \cdot \delta t$$

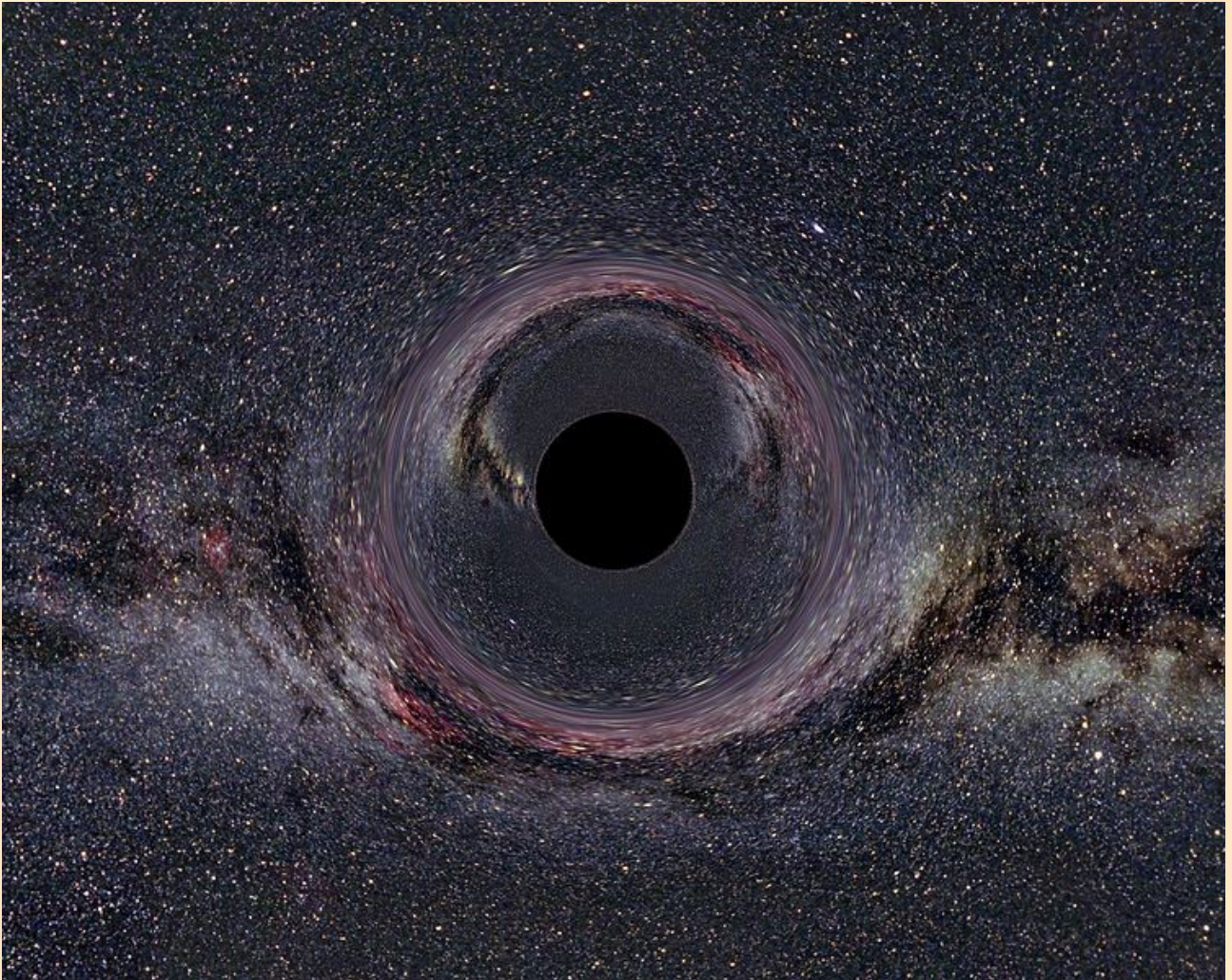
Man kann auch die Änderung der Vektorkomponente a^i längs einer geschlossenen Kurve berechnen. Die geschlossene Kurve ist dann durch Geodäten gegeben, die einen Startpunkt A mit B und B mit C verbinden. Darüber hinaus gelangt man auch über Geodäten, die A mit D und D mit C verbinden, zum selben Punkt C auf der Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die Änderung der Vektorkomponenten entlang der unterschiedlichen Wege ergibt sich dann zu:

$$\delta a^i \approx -R_{ljk}^i a^l \frac{dq^j}{dt^1} \cdot \frac{dq^k}{dt^2} \cdot \delta t^1 \cdot \delta t^2$$



Quelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_transport

Die Abbildung zeigt einen Parallelentransport eines Vektors von Punkt A nach Punkt B über Punkt N zurück nach Punkt A auf der Kugeloberfläche entlang Großkreise. Wie man sieht, bildet der Vektor nach dem Parallelentransport einen Winkel von 90° zum Startvektor. Die Geodäten auf der Kugel sind die Großkreise, also Äquator und Meridiane.



*Ein simuliertes Schwarzes Loch von 10 Sonnenmassen vor Milchstraßenhintergrund aus 600km Abstand gesehen (horizontaler Öffnungswinkel der Kamera: 90°) Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/Black_hole
Lizenz: [Creative Commons Attribution-Share Alike 2.5 Generic](#)*

Teil II: Die Physik der Feldgleichungen oder der Energie- Impuls-Tensor



Kapitel I: Physikalische Grundlagen der Allgemeinen Relativitätstheorie

1.1 Die Feldgleichung der Gravitation klassisch

Ausgangspunkt der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Spezielle Relativitätstheorie, in der jedes Labor, das sich mit gleichförmiger geradliniger Geschwindigkeit – also kräftefrei – bewegt, gleichberechtigt ist, d. h. die physikalischen Gesetze sind in jedem dieser Labore gleich. Die Labore nennt Einstein Inertialsysteme. Die Allgemeine Relativitätstheorie beschäftigt sich mit einem Labor, das sich unter Einwirkung einer Kraft beschleunigt bewegt.

Wir beschäftigen uns zuerst mit Laboren, die sich unter dem Einfluss der Gravitationskraft beschleunigt bewegen. Nach der Newtonschen Gravitationstheorie ist Kraft eine Größe, die sich als Produkt von Masse und Beschleunigung mit der **Gravitationskonstanten** G darstellen lässt.

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

Dies führt dazu, dass die Gravitationskraft als Beschleunigungsfeld dargestellt werden kann, das – bei einer gegebenen Masse – radial zum Massenzentrum ausgerichtet ist.

$$a_G = G \cdot \frac{m_1}{r^2} \quad \text{mit} \quad r \geq R$$

Die Massen werden kugelförmig mit homogener Massenverteilung angenommen, sodass das Massenzentrum im Mittelpunkt der Kugel liegt. Die Beschleunigung nach obiger Formel gilt für Objekte außerhalb der Massenkugel. Der wesentliche Unterschied zwischen der Newtonschen Gravitationstheorie und der Gravitationstheorie Einsteins ist, dass die Beschleunigung, die physikalisch über Raum und Zeit berechnet wird, als eine geometrische Größe der Raumzeit gegeben ist, die durch die Anwesenheit von Massen hervorgerufen wird.

Das Gravitationspotenzial ist eine skalare Größe, die angibt, welche Arbeit man aufwenden muss, um einen Körper der Testmasse m radial aus dem Gravitationsfeld einer Masse m_1 zu bewegen:

$$\Phi(r_0) = \int_{r_0}^{\infty} G \cdot \frac{m_1}{r^2} dr = -G \frac{m_1}{r_0} \quad \text{für} \quad r_0 \geq R .$$

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \frac{m_1}{r} \quad \text{für} \quad r \geq R ; \quad \vec{e}_a = -\vec{e}_r$$

Für eine kontinuierliche Massenverteilung $\rho(r)$ gilt die Feldgleichung der Gravitation:

$$\text{div } \vec{a}(\mathbf{r}) = -4\pi G \rho(\mathbf{r}) .$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Dabei ist das Beschleunigungsfeld $\vec{a}(r)$ das Gradientenfeld eines skalaren Feldes $\Phi(r)$, das über das Gravitationspotenzial $\Phi(r) = -G \frac{m}{r}$ gegeben ist.

Es gilt also mit $\text{grad } \Phi(r) = \frac{G \cdot m}{r^2} \cdot \vec{e}_r$:

$$\text{div } \vec{a}(r) = \text{div grad } \Phi(r)$$

oder mit dem Laplaceoperator $\Delta = \text{div grad}$:

$$\Delta \Phi(r)$$

Die Herleitung für die Newtonsche Feldgleichung der Gravitation beruht auf dem Gaußschen Integralsatz. Aus Kapitel 2.4 wissen wir:

$$\iiint_V \text{div grad } \Phi(r) = \iint_{\partial V} \text{grad } \Phi(r) \cdot d\vec{f} \quad .$$

Die Vektoren $d\vec{f}$ und $\text{grad } \Phi(r)$ sind parallel. Deshalb ist $\text{grad } \Phi(r) \cdot d\vec{f}$ an der Kugeloberfläche konstant und man erhält:

$$\iint_{\partial V} \text{grad } \Phi(r) \cdot d\vec{f} = 4 \pi R^2 \cdot k$$

Die Konstante k ist dabei gleich der Länge des Vektors $\text{grad } \Phi(r)$ an der Kugeloberfläche. Dies entspricht der Beschleunigung an der Kugeloberfläche: $k = G \frac{m}{R^2}$ und damit folgt:

$$\iint_{\partial V} \text{grad } \Phi(r) \cdot d\vec{f} = 4 \pi G m$$

Aus dieser Beziehung folgt die Poisson-Gleichung

$$\iiint_V \text{div grad } \Phi(r) = 4 \pi G m \quad \text{oder}$$

$$\Delta \Phi(r) = 4 \pi G \rho(r) \quad .$$

Dabei haben wir $\rho(r) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m(r)}{\Delta V(r)}$ ausgenutzt. Die Poisson-Gleichung wird normalerweise als Newtonsche Feldgleichung der Gravitation angegeben.

Wir hatten schon die Differenzialoperatoren in allgemeinen Koordinaten behandelt:

$$(\text{grad } \lambda)_i = \nabla_i \lambda = \lambda_{|i} = \frac{\partial \lambda}{\partial q^i}$$

$$\text{div } \vec{v} = \nabla_i v^i = v^i_{|i} = \frac{\partial v^i}{\partial q^i} + \Gamma^i_{ij} v^j$$

$$\Delta = \nabla_i \cdot \nabla_i$$

Damit hat die Poisson-Gleichung in allgemeinen Koordinaten die Form:

$$\Delta \Phi = \nabla_i \cdot \nabla_i \Phi = 4 \pi G \rho \quad .$$

Eine Verallgemeinerung erhält man, wenn man die rechte Seite der Gleichung durch eine Funktion f ersetzt:

$$\Delta \Phi = \nabla_i \cdot \nabla_i \Phi = f$$



Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sir_Isaac_Newton_by_Sir_Godfrey_Kneller,_Bt.jpg#/media/File:Sir_Isaac_Newton_1702.jpg

1.1.1 Beschleunigung im Innern der Erde

Eine interessante Anwendung der Feldgleichungen der Gravitation gemäß Newton ergibt sich aus folgendem Gedankenexperiment: Würden wir ein Bohrloch quer durch die Erde bohren, dann würde eine Eisenkugel auch mitten durch die Erde fallen. Allerdings gilt in diesem Fall nicht mehr das Newtonsche Gravitationsgesetz in der obigen Form.

Um eine entsprechende Aussage über das Beschleunigungsfeld im Inneren der homogenen kugelförmigen Massen herzuleiten, können wir die Masse der Erde in Abhängigkeit von der Position des frei fallenden Körpers \vec{r} in zwei Bereiche einteilen, eine Kugel mit Radius $r < R_{\text{Erde}}$ und den Außenbereich dieser inneren Kugel mit $r < r' < R_{\text{erde}}$. Man kann zeigen, dass der Außenbereich keinen Beitrag zur Beschleunigung liefert¹³. Genauer gilt:

Auf Massenzentren im Inneren einer Hohlkugel mit einer homogenen Massenverteilung wirken keine Kräfte.

Außerhalb einer Massenverteilung wirkt die Gravitationskraft immer so, als wäre die gesamte Masse im Massenmittelpunkt konzentriert.

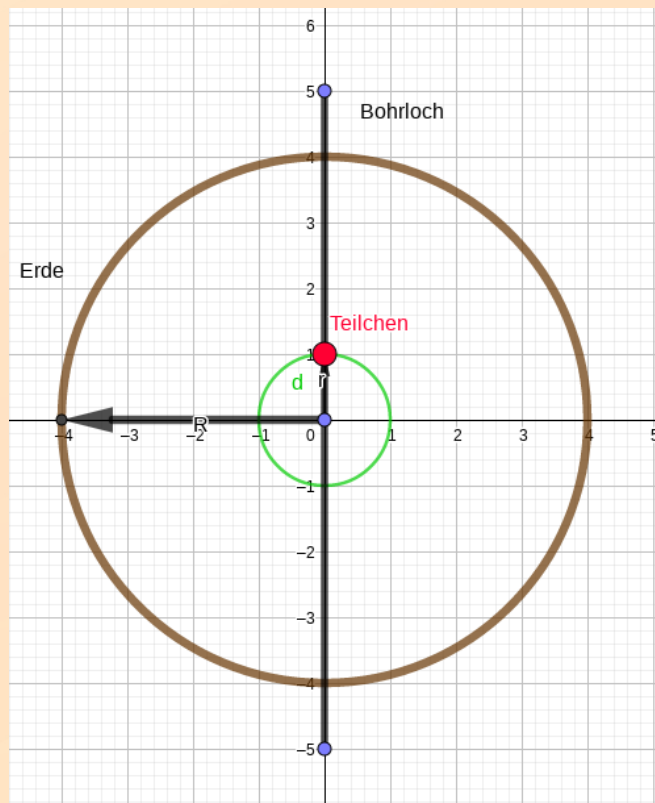


Abbildung: Teilchen bewegt sich unter dem Einfluss der Gravitation durch die Erde, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

13 Siehe: <http://wwwex.physik.uni-ulm.de/lehre/krm-2008-2009/node19.html#SECTION00572500000000000000>

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Deshalb ist die Beschleunigung an der Oberfläche der inneren Kugel:

$$a_{G\text{Innen}} = G \cdot \frac{m_{\text{Innen}}}{r^2} .$$

An der Erdoberfläche haben wir laut Gravitationsgesetz eine Beschleunigung von:

$$a_{\text{Erde}} = G \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{R^2} .$$

Berechnet man das Verhältnis beider Beschleunigungen, so erhalten wir:

$$\frac{a_{\text{Erde}}}{a_{\text{Innen}}} = \frac{G \cdot \frac{m_{\text{Erde}}}{R^2}}{G \cdot \frac{m_{\text{Innen}}}{r^2}} = \frac{M_{\text{Erde}}}{m_{\text{Innen}}} \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

Da wir eine homogene Massenverteilung angenommen haben, ergibt sich für $m_{\text{Erde}} = \frac{4}{3} \pi R^3$ und für $m_{\text{Innen}} = \frac{4}{3} \pi r^3$. Setzt man dies in die Gleichung von oben ein, so liefert das:

$$\frac{a_{\text{Erde}}}{a_{\text{Innen}}} = \frac{R}{r}$$

$$a_{\text{Innen}} = a_{\text{Erde}} \frac{r}{R}$$

$$\text{bzw. } \vec{a}_{\text{Innen}} = - a_{\text{Erde}} \frac{\vec{r}}{R}$$

Die Beschleunigung zeigt immer in die umgekehrte Richtung des Ortsvektors \vec{r} , was das negative Vorzeichen in der Vektorgleichung erklärt. Es handelt sich um ein lineares Kraftgesetz und entspricht deshalb einer harmonischen Schwingung. Dies bedeutet, dass sich im Idealfall die durch das Bohrloch fallende Eisenkugel hin und her bewegt.

1.2 Die Postulate der Allgemeinen Relativitätstheorie

Mit **KS** sollen beliebige Bezugssysteme bezeichnet werden, die im Allgemeinen beschleunigt sind und krummlinige Koordinaten besitzen. Ein Ansatzpunkt für die Allgemeine Relativitätstheorie oder die Verallgemeinerung der Newtonschen Feldgleichung der Gravitation ergibt sich aus den Maxwell Gleichungen, die kovariant unter Lorentztransformationen sind.

Wirkt eine Kraft auf eine Masse, dann wird sich der Bewegungszustand der Masse ändern. Die Änderung des Bewegungszustandes – der Geschwindigkeit – wird zeitlich gesehen langsamer sein, je größer die Masse ist, wenn die Kraft konstant gehalten wird. Man nennt dieses Verhalten von Massen bezüglich konstanter Kräfte, die auf sie wirken und den Bewegungszustand ändern, auch das Verhalten einer **trägen Masse**. In der Newtonschen Mechanik gilt:

$$m t_1 \cdot g_1 = m t_2 \cdot g_2 \quad , \text{ falls die Kraft konstant ist.}$$

Damit erhält man:

$$\frac{m t_1}{m t_2} = \frac{g_2}{g_1} \quad .$$

Je größer die Masse m_1 bezogen auf m_2 ist, umso größer ist die Beschleunigung der kleineren Masse m_2 gegenüber der größeren Masse m_1 . Das Beschleunigungsverhältnis verhält sich umgekehrt proportional zum Masseverhältnis.

Lässt man unterschiedliche Körper mit unterschiedlichen Massen reibungsfrei an der Erdoberfläche senkrecht herunterfallen, dann fallen beide Körper gleich schnell unabhängig von ihren trägen Massen. Die Beschleunigung beider Körper ist also gleich, und damit gilt für die Kräfte: $F_1 = g \cdot m t_1$ und $F_2 = g m t_2$. Physikalisch kann man die beiden Kräfte F_1 und F_2 über eine Federwaage messen. Dann hat man $F_1 = m s_1 \cdot a$ und $F_2 = m s_2 \cdot a$. Die beiden Massen $m s_1, m s_2$ nennt man schwere Massen. Bildet man das Verhältnis beider Gleichungen, erhält man:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m t_1}{m t_2} = \frac{m s_1}{m s_2} \quad \text{oder} \quad \frac{m t_1}{m s_1} = \frac{m t_2}{m s_2} \quad .$$

Die allgemeine Relativitätstheorie geht davon aus, dass immer $\frac{m t}{m s} = 1$ gilt oder dass die schwere Masse gleich der trägen Masse ist.

Annahme 1: Schwere Masse ist gleich träger Masse.

Das nächste Gedankenexperiment geht auf Einstein zurück. Einstein wählte als Bezugssysteme Fahrstühle. Im ersten Fall ruht der Fahrstuhl im Gravitationsfeld. Das Gewicht eines Objektes im Fahrstuhl wird mit einer Waage gemessen. Die Fallbeschleunigung des Fahrstuhls sei eine konstante Größe g . Dasselbe Gewicht wird die Waage aber auch dann anzeigen, wenn der

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Fahrrstuhl im gravitationsfreien Raum mit konstanter Beschleunigung g seine Geschwindigkeit ändert.

Befindet sich der Fahrstuhl in einem Gravitationsfeld im freien Fall, dann wird die Waage kein Gewicht für das Objekt im Fahrstuhl anzeigen. Dies kann wie folgt hergeleitet werden:

Hat ein Objekt mit der Masse m_t im Fahrstuhl die Koordinate y' , dann ändert sich diese Koordinate für einen Beobachter im Fahrstuhl nicht, wenn der Fahrstuhl im freien Fall ist. Ein außen stehender Beobachter ermittelt allerdings für diese Koordinaten den Wert: $y = y' + \frac{1}{2}gt^2$.

Hier ist g die Fallbeschleunigung, die wir als konstant voraussetzen. Bildet man die zweite Ableitung nach der Zeit, so erhält man die entsprechende Gleichung für die Beschleunigungen, die der äußere Beobachter messen kann: $\ddot{y} = \ddot{y}' + g$.

Dies liefert folgende Gleichung für die Kraft: $m_t \ddot{y} = m_t \ddot{y}' + m_s g$. Da die y Koordinate die Änderung des Ortes bezüglich des ruhenden Beobachters ist, ermittelt dieser für die Beschleunigung $\ddot{y} = g$.

Setzt man das in die Kraftgleichung ein, so ergibt das: $m_t g = m_t \ddot{y}' + m_s g$ oder $(m_t - m_s)g = m_t \ddot{y}'$. Da nach Annahme 1 schwere Masse gleich träger Masse ist, erhält man:

$$m_t \ddot{y}' = 0, \text{ oder } \ddot{y}' = 0.$$

Dasselbe gilt aber auch für einen mit konstanter Geschwindigkeit bewegenden Fahrstuhl im gravitationsfreien Raum.

Diese Annahme, dass die schwere Masse gleich der trägen Masse ist, ist für die Allgemeine Relativitätstheorie eine zentrale Forderung. Deshalb versucht man auch, mit immer besseren Messmethoden diese Annahme zu bestätigen.¹⁴ So hat man in letzter Zeit über ein Satellitenexperiment bestätigen können, dass die Gravitationsbeschleunigung auf unterschiedliche Massen mit einer Genauigkeit von 10^{-14} gleich ist. Allerdings gibt es in der Quantenphysik Prozesse, für die dieses Prinzip nicht gilt. Das scheint auch eine grundlegende Hürde zu sein, um die Gravitationskraft mit den anderen Kräften in der Quantenphysik einheitlich darzustellen. Deshalb suchen die Physiker weiter, ob es nicht doch Verletzungen der 1. Annahme Einsteins im kleinsten Bereich geben kann.

Annahme 2: Ein ruhendes System im Gravitationsfeld ist dasselbe wie ein beschleunigtes System im gravitationsfreien Raum.

Einstein ging aber noch weiter und erweiterte die 2. Annahme zum starken Äquivalenzprinzip:

In einem kleinen Labor, das in einem Gravitationsfeld frei fällt, sind die Gesetze der Physik dieselben wie in einem Labor, das sich im gravitationsfreien Raum befindet und sich dort mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

14 Siehe: https://www.deutschlandfunk.de/einstein-auf-dem-pruefstand-aequivalenz-von-schwerer-und-676.de.html?dram:article_id=321529

1.2.1 Beispiele frei fallender Bezugssysteme

Als Beispiel für ein Labor, das im Gravitationsfeld frei fällt, können wir die **Internationale Raumstation ISS** nehmen. Da sie keine Eigenrotation besitzt, fällt sie frei im Gravitationsfeld der Erde. Aber warum fällt sie nicht herunter? Weil es sich bei der Bewegung um eine Kreisbewegung um die Erde handelt. Dabei tritt eine konstante Geschwindigkeitskomponente auf, die die ISS gleichförmig und geradlinig von der Erde entfernen würde, falls es keine Gravitationskraft gäbe. Die Internationale Raumstation fällt also in kleinen Zeitintervallen Δt um den gleichen Betrag auf die Erde zu, wie sie sich von der Erde entfernt. Damit kann man die Geschwindigkeit der Raumstation berechnen.

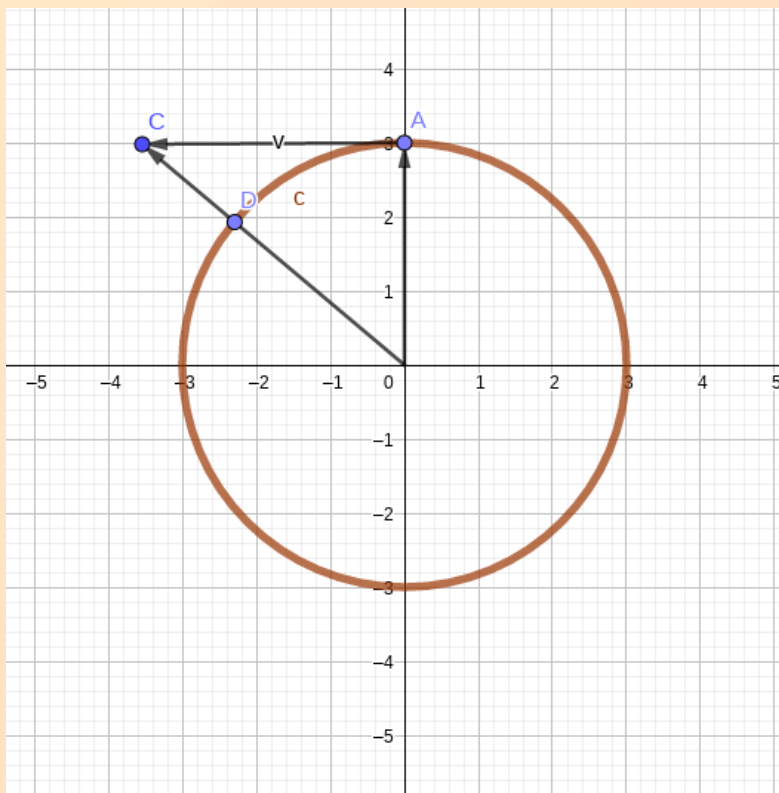


Abbildung: Die ISS im Punkt A bewegt sich ohne den Einfluss der Gravitationskraft nach Punkt C und mit Einfluss der Gravitationskraft nach D, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Ist R der Radius der Kreisbahn der IS um die Erde. Dann gilt nach dem Satz des Pythagoras:

$$(R + \Delta R)^2 = R^2 + (v \cdot \Delta t)^2 \Leftrightarrow R^2 + 2 \cdot R \cdot \Delta R + (\Delta R)^2 = R^2 + (v \cdot \Delta t)^2 \quad .$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Dabei muss $\Delta R = \frac{1}{2} g_{IS} \cdot \Delta t^2$ gelten, wobei g_{IS} die Erdbeschleunigung in der Flughöhe h der IS ist, die man nach Newton wie folgt ausrechnen kann: $g_{IS} = \frac{G \cdot M_{Erde}}{(R_{Erde} + h)^2} = \frac{G \cdot M_{Erde}}{R^2}$. Die Gleichung von oben ergibt dann unter Vernachlässigung des Terms $(\Delta R)^2$ die Näherung:

$$2 \cdot R \cdot \Delta R = (v \cdot \Delta t)^2$$

oder

$$2 \cdot R \cdot \frac{1}{2} g_{IS} \cdot \Delta t^2 = v^2 \cdot \Delta t^2$$

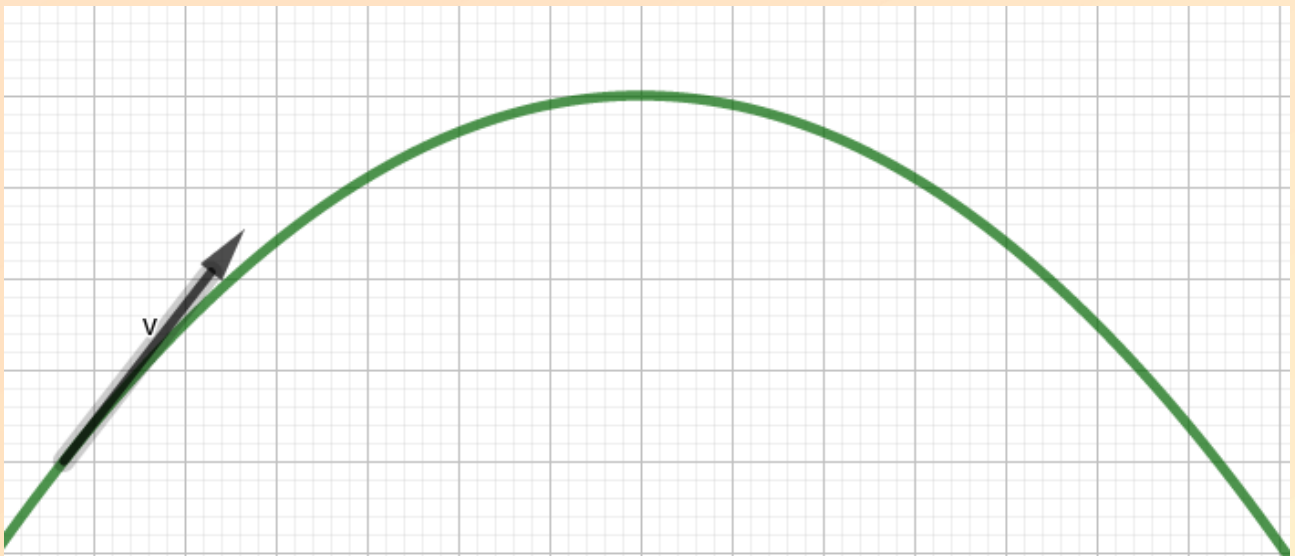
oder

$$R \cdot \frac{G \cdot M_{Erde}}{R^2} = v^2$$

oder

$$\sqrt{\frac{G \cdot M_{Erde}}{R}} = v$$

Ein Labor, das sich in einem Flugzeug befindet, kann man ebenfalls benutzen, wenn der Pilot die Maschinen ausstellt. Dies nutzt man bei Parabelflügen aus, um die Schwerelosigkeit zu erzeugen. Dabei erreicht der Pilot eine gewisse Starthöhe und schaltet danach die Motoren ab. Vernachlässigt man entsprechende Reibungskräfte, so befindet sich das Flugzeug ebenfalls im freien Fall. Die Flugbahn entspricht dann näherungsweise einer parabelförmigen Bahn.

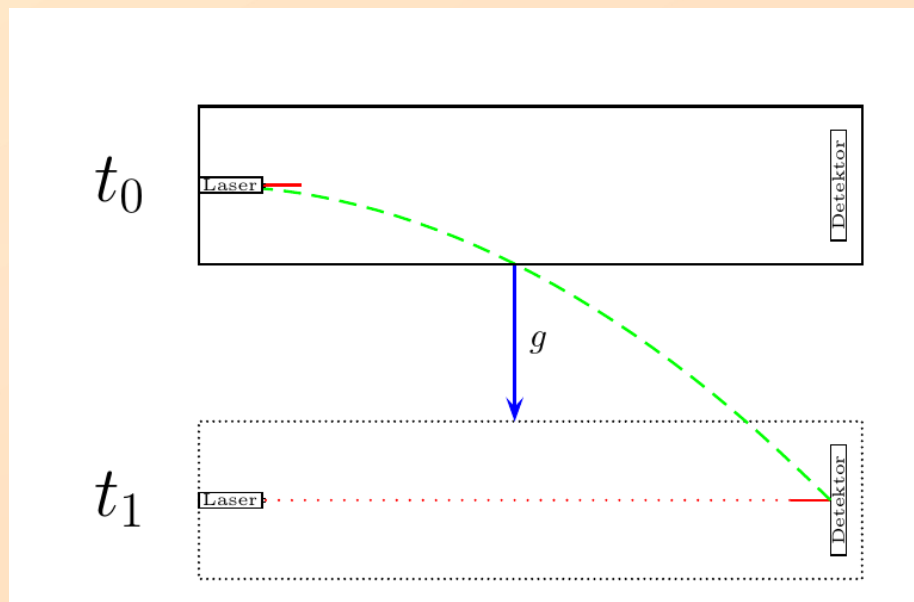


Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Das Labor muss deshalb klein sein, weil die Gravitation nicht homogen ist. Ein Gravitationsfeld ist nichts anderes als ein Beschleunigungsfeld. Allerdings nimmt die Stärke des Gravitationsfeldes mit dem Quadrat des Abstandes ab. Nähert man sich der Masse, die das Gravitationsfeld erzeugt, dann können bei geringen Abstandsänderungen sehr starke Unterschiede in der Beschleunigung auftreten. Man spricht in diesem Fall von Gezeitenkräften, die dann auch in einem Labor wirksam werden können. So werden für einen Beobachter, der sich mit seinem Fahrstuhl im freien Fall auf ein Schwarzes Loch befindet, die Gezeitenkräfte immer stärker werden, die sich dann auch auf ihn selbst auswirken. Sein Fahrstuhl und alles, was sich in ihm befindet, wird in die Länge gezogen oder zu Spaghetti gemacht.

Außerdem sieht man, dass in einem Gravitationsfeld das Licht abgelenkt wird. Wird ein Lichtstrahl im frei fallenden Fahrstuhl waagrecht zum Fahrstuhlboden gesendet, so ändert er im Fahrstuhl seine Höhe zum Boden nicht und verläuft geradlinig. Ein Beobachter, der von außerhalb des Fahrstuhls denselben Vorgang sieht, wird zu dem Ergebnis kommen, dass der Lichtstrahl eine krummlinige Bahn hat, weil sich in seinem unbewegten Bezugssystem die Höhe des Lichtstrahls zur Waagerechten abnimmt (Siehe Abbildung).



Quelle: Skript zur Vorlesung von Apl. Prof. Jörg Main. Bearbeitung von Sebastian Boblest, vorläufige Version SS 2011

Die zweite Annahme Einsteins bezieht sich auf ein Koordinatensystem im Labor. In einem lokalen Bezugssystem laufen alle Vorgänge so ab, als sei keine Gravitation vorhanden. Die Transformation von einem lokalen Bezugssystem, in dem die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gelten, in ein beliebiges Bezugssystem **KS** führt auf Gesetze der Gravitation. Es handelt sich bei dem lokalen Bezugssystem aber nicht um ein Koordinatensystem, das den vierdimensionalen Euklidischen Raum beschreibt. Einstein hat mit der Speziellen Relativitätstheorie zeigen können, dass unter der Voraussetzung der **Konstanz der Lichtgeschwindigkeit** in jedem Inertialsystem die Gesetze der **Zeitdilatation** und **Längenkontraktion** für gleichförmig bewegte Objekte gelten. Dies entspricht nicht dem vierdimensionalen Euklidischen Raum, aber einem Raum, der flach ist, also einen konstanten Metriktensor aufweist. Man nennt diesen Raum den Minkowskiraum.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Der Metriktenor wird normalerweise als Änderung der Bogenlänge entlang einer Kurve c beschrieben. Wir hatten dafür schon den Ausdruck:

$$ds^2 = g_{ij} \cdot dq^i \cdot dq^j$$

in allgemeinen Koordinaten hergeleitet. Die Koordinaten im Minkowskiraum sind gegeben durch:
 $(x^t, x, y, z) = (-c \cdot t, x, y, z)$ oder $(x^t, x, y, z) = (c \cdot t, -x, -y, -z)$, wobei t die Zeitkoordinate ist, c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet und x, y, z den räumlichen Koordinaten in kartesischen Koordinatensystem entsprechen. Wir wollen deshalb zunächst physikalische Ereignisse im Minkowskiraum betrachten, der als **lokales Bezugssystem** für das Labor genommen wird, von dem Einstein in seiner zweiten Annahme ausgeht.

Kapitel II: Der Minkowskiraum und die Spezielle Relativitätstheorie

2.1 Der Minkowskiraum

Wir wollen zuerst einen Raum behandeln, der uns zu den Gesetzen der Speziellen Relativitätstheorie führt. Er hat in jedem Punkt eine konstante Metrik und ist deshalb ein flacher Raum. Die Metrik wird über das Wegelement beschrieben, weil es die Informationen des Metriktensors enthält. Es gibt zwei Versionen für das Wegelement. Die Version, die wir hier wählen, hat die Signatur $\{1, -1, -1, -1\}$. Die andere Signatur $\{-1, 1, 1, 1\}$ führt dann zu äquivalenten Aussagen. Für die Änderung des Wegelementes im Minkowskiraum gilt dann:

$$ds^2 = d\tau^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Damit erhält man für den Metriktensor:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ oder } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wenn man $ds^2 = -d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ setzt. Die Koordinaten sind (τ, x, y, z) . Man setzt $\tau = c \cdot t$ mit der Lichtgeschwindigkeit c als Konstante, dann hat man folgende Metrik:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Der Metriktensor ist dann:

$$\begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da der Metriktensor eine Diagonalmatrix ist, stehen die Basisvektoren des Minkowskiraums alle senkrecht aufeinander. Wir können uns den Minkowskiraum also als kartesisches Koordinatensystem vorstellen. Allerdings ist die Länge der Vektoren nicht positiv. Man bezeichnet dies als Pseudometrik. Verwendet man den physikalischen Begriff der Geschwindigkeit, so, wie er in kartesischen Koordinaten definiert ist, so erhält man mit

$$v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

oder

$$v^2 \cdot dt^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 \cdot dt^2 - v^2 dt^2 \quad .$$

oder

$$ds^2 = c^2 \cdot dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

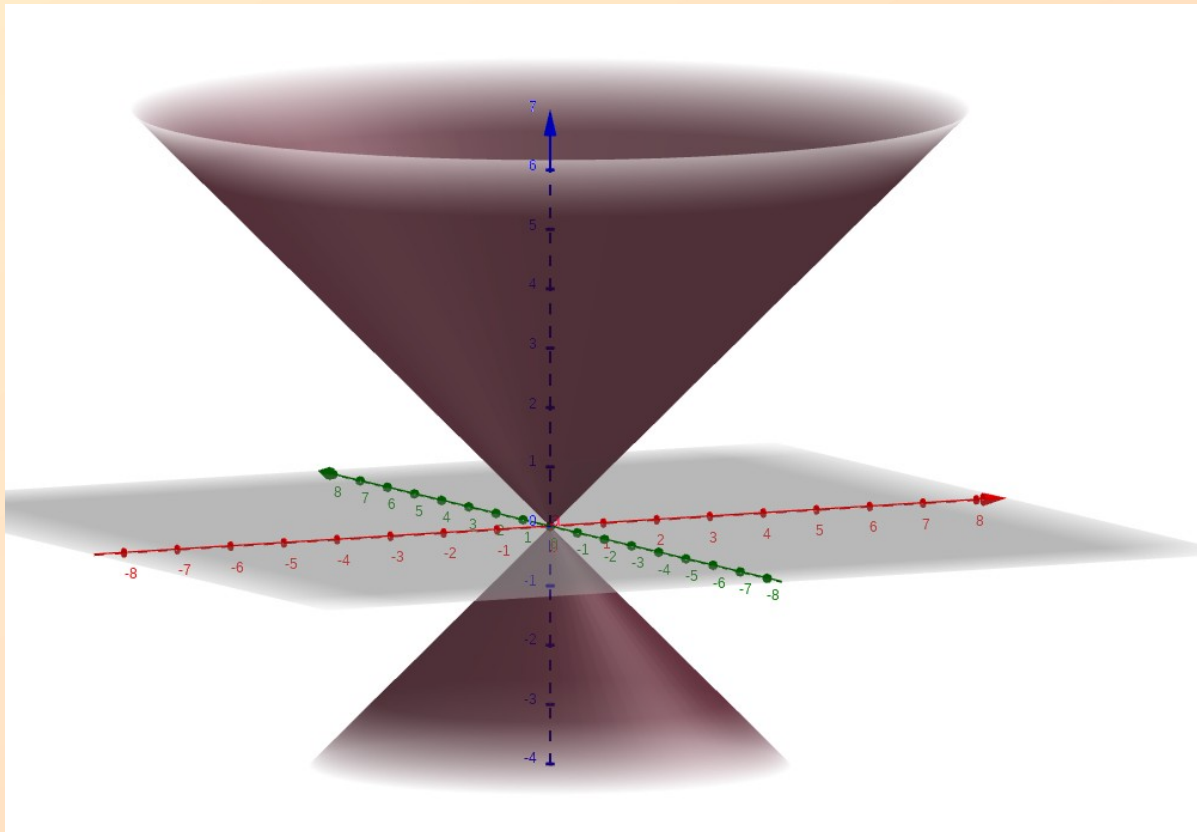


Abbildung: Minkowskiraum mit Lichtkegel, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Ist $v < c$ dann ist ds^2 positiv. Diese Punkte oder physikalischen Ereignisse liegen innerhalb des Lichtkegels und man nennt sie **zeitartig**, weil dann durch $\frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot dt^2$ eine zeitliche Größe definiert ist.

Ist $v > c$, was physikalisch nicht möglich ist, dann liegen die Punkte oder Ereignisse im Minkowskiraum außerhalb des Lichtkegels. Wir nennen diese Punkte dann **raumartig**, weil wir für sie kein sinnvolles physikalisches Ereignis definieren können. Gemäß der Metrik im Minkowskiraum wäre dann ds^2 negativ, und die entsprechend zeitliche Größe $\frac{ds^2}{c^2} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot dt^2$ wäre dann negativ. Die Zeit würde also rückwärts laufen.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

*Ist $v = c$, dann liegen die Punkte im Minkowskiraum auf der Oberfläche des Lichtkegels. Hier verschwindet die zeitliche Größe dt . Man nennt diese Punkte auch **lichtartig**, weil sie physikalischen Ereignissen entsprechen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten.*

2.2 Kurven im Minkowskiraum

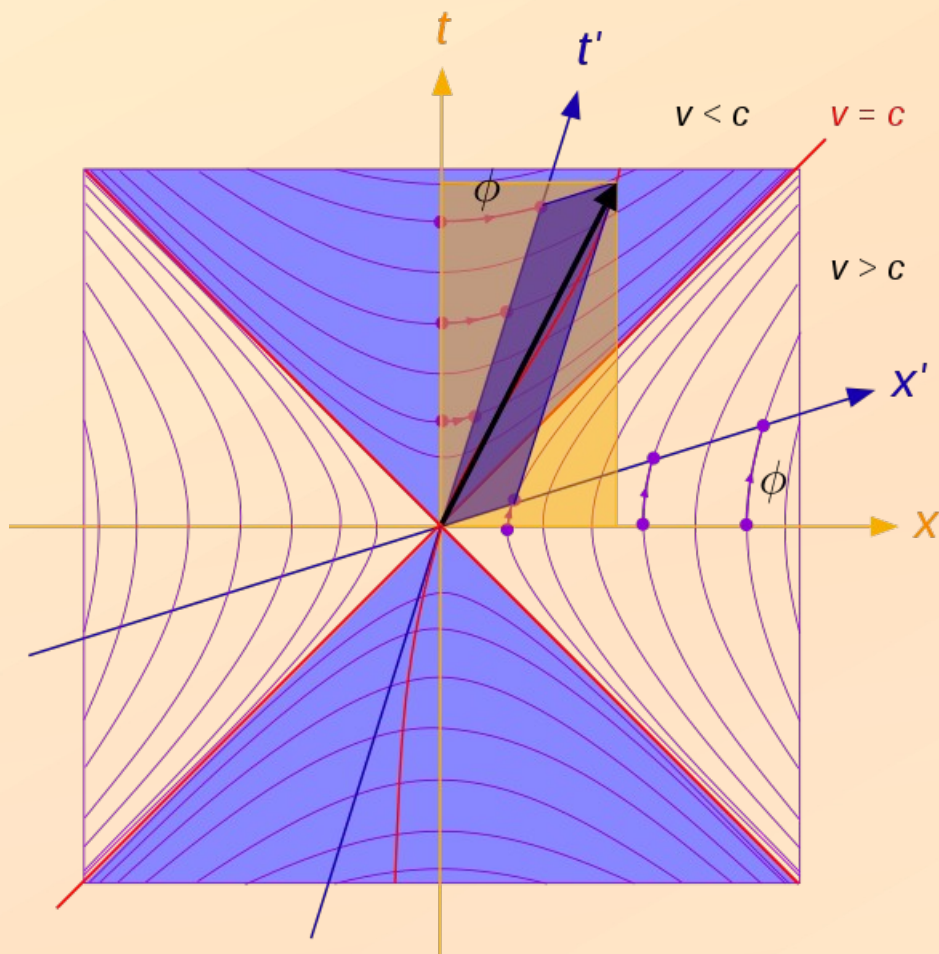


Abbildung 1: Von Maschen Eigenes Werk, Gemeinfrei, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=18216651>

Es soll im folgenden im Minkowskiraum das Koordinatensystem X eines ruhenden Beobachters mit dem Koordinatensystem X' eines bewegten Beobachters verglichen werden, der sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit v in Richtung des ruhenden Beobachters bewegt. Da die Geschwindigkeit gleichförmig ist, ändern sich die Richtung und der Betrag der Geschwindigkeit nicht. Wir können also annehmen, dass die Bewegung des Inertialsystems X' entlang der x -Achse im Minkowskiraum stattfindet. Für das Linienelement ergibt sich: $ds^2 = c^2 \cdot dt^2 - dx^2$. Hier handelt es sich um den bezüglich der Minkowskimetrik modifizierte Satz des Pythagoras. Die Abbildung zeigt, wie sich das Koordinatensystem des bewegten Beobachters im Minkowskiraum verändert. Die Abbildung zeigt darüber hinaus, dass bewegte Inertialsysteme im Minkowskiraum schiefwinklige Koordinatenlinien haben. Diese Koordinatenlinien entstehen durch Drehungen im Minkowskiraum. Um dies einzusehen, untersucht man die Eigenschaften einer Drehung im Euklidischen Raum:

$$x^2 = y^1 \cdot \sin \alpha + y^2 \cdot \cos \alpha$$

$$|\vec{A}| = (x^1)^2 + (x^2)^2 = (y^1 \cdot \cos \alpha - y^2 \cdot \sin \alpha)^2 + (y^1 \cdot \sin \alpha + y^2 \cdot \cos \alpha)^2 = (y^1)^2 + (y^2)^2$$

Der metrische Tensor bleibt in beiden Koordinatensystemen unverändert:

$$(g_{nm}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Rotation im Euklidischen Raum kann man auch durch folgende Matrix beschreiben:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

Drehen wir das Koordinatensystem wieder über $-\alpha$ zurück, so erhalten wir wieder das Ausgangssystem.

Vergleicht man die beiden Transformationen $R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ und

$$R_{-\alpha} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

so stellt man fest, dass die Zeilen in R_α die Spalten von $R_{-\alpha}$

sind. Man nennt eine solche Matrix die transponierte Matrix R_α^T . R_α^T ist also die Umkehrmatrix zu R_α . Es gilt: $R_\alpha \circ R_\alpha^T = E$. Das ist auch die Gleichung, über die die orthogonalen Transformationen definiert sind. Zusammengefasst können wir die Eigenschaft der Rotation in folgender Gleichung beschreiben:

$$R \circ (g_{nm}) \circ R^T = (g_{nm}).$$

Natürlich ist in der obigen Gleichung g_{nm} die Einheitsmatrix, weil es sich um den Metriktensor des Euklidischen Raum handelt. Wir wollen nun nach Transformationen im Minkowskiraum suchen, die dieselben Eigenschaften wie die Drehungen im Euklidischen Raum haben:

$R \circ (g_{nm}) \circ R^T = (g_{nm})$. Hier ist (g_{nm}) allerdings der metrische Tensor im Minkowskiraum. Dazu machen wir folgenden Ansatz:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 & -ac + bd \\ -ac + bd & -c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies liefert:

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$a^2 - b^2 = 1$$

$$d^2 - c^2 = 1$$

$$bd - ac = 0$$

$$\cosh^2(\Phi) - \sinh^2(\Phi) = 1$$

$$\cosh^2(\Phi) - \sinh^2(\Phi) = 1 \quad .$$

Zu den Gleichungen rechts stehen die analogen Gleichungen der hyperbolischen Winkelfunktionen. Damit erhalten wir für die Drehmatrix im Minkowskiraum:

$$R = \begin{pmatrix} \cosh(\Phi) & \sinh(\Phi) \\ \sinh(\omega) & \cosh(\Phi) \end{pmatrix}$$

Wie man in der **Abbildung 1** sieht, entsteht das Koordinatensystem des bewegten Beobachters im Minkowskiraum durch Drehung um den hyperbolischen Winkel Φ . Im blauen – den zeitartigen – und im weißen – den raumartigen – Bereich sind die hyperbolischen Koordinatenlinien zu sehen. Wird die Geschwindigkeit des Inertialsystems immer größer werden, so werden sich die Koordinatenachsen des bewegten Beobachters im Minkowskiraum immer mehr der Winkelhalbierenden dem Ereignishorizont nähern.

Eine gleichförmige Bewegung im zweidimensionalen Minkowskiraum ist also eine Gerade mit einem Steigungsfaktor größer 1 im zeitartigen Bereich und einem Steigungsfaktor kleiner 1 im raumartigen Bereich. Um die Linien besser zeichnen zu können, setzen wir wieder $c=1$. Damit ergibt sich die Koordinatenlinie t' (blaue Gerade, Abbildung 2) für ein Inertialsystem, dass sich mit der Geschwindigkeit v gleichförmig bewegt. Die x' Koordinatenlinie erhält man dann durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden ($v=c$). Da wo die blaue Koordinatenachse t' die roten Hyperbeln im zeitartigen Bereich (hellgrüner Bereich) schneiden, ist die Geschwindigkeit konstant. Wie oben gezeigt wurde, entstehen die blauen Geraden – die Koordinatenlinien der Inertialsysteme – durch eine Drehung im Minkowskiraum.

Geraden im raumartigen Bereich würden gleichförmigen Bewegungen mit Überlichtgeschwindigkeit bedeuten, was physikalisch keinen Sinn ergibt, weil die Lichtgeschwindigkeit in jedem Inertialsystem konstant ist.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

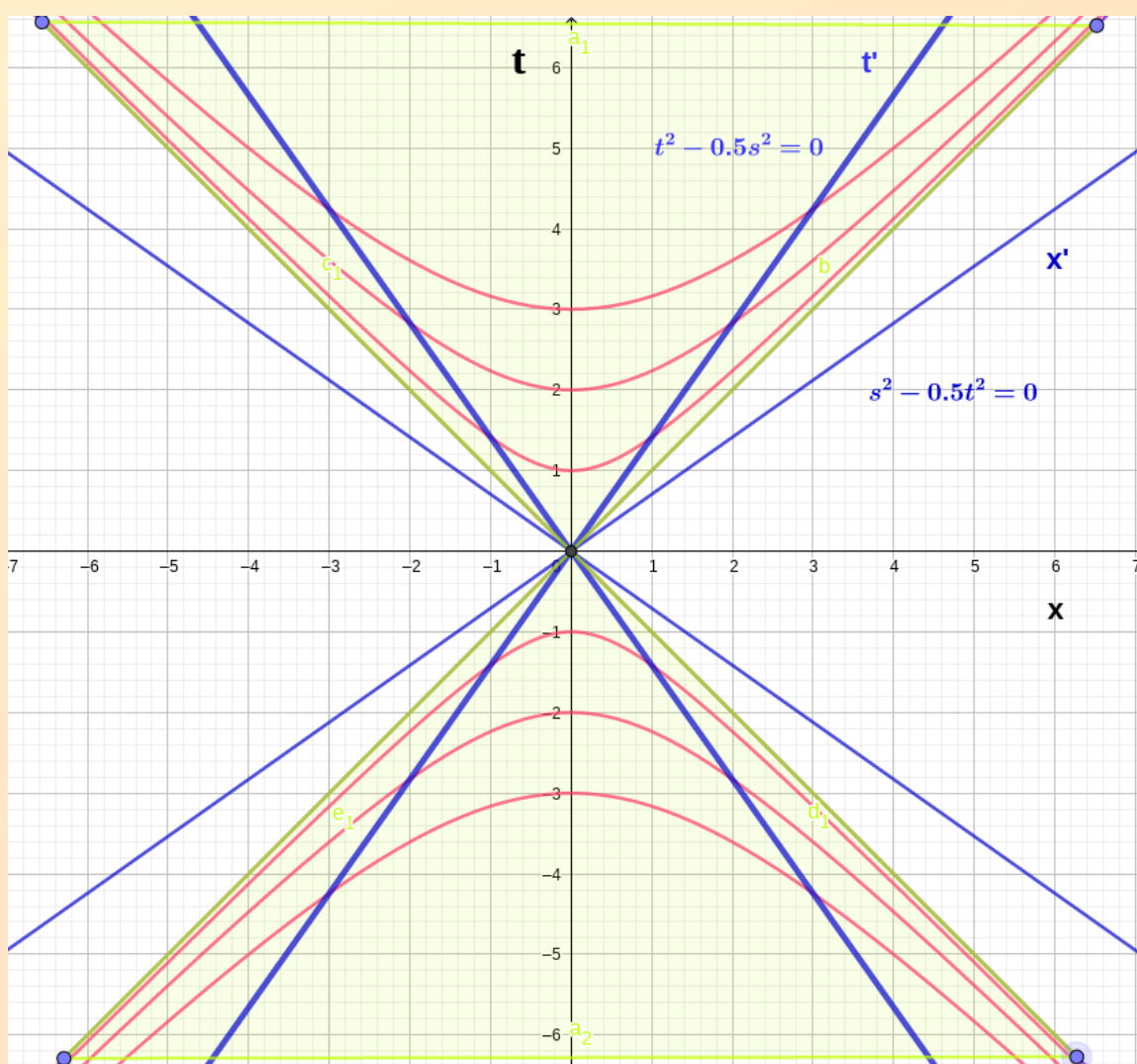


Abbildung 2: Kurven konstanter Geschwindigkeit und konstanter Beschleunigung im Minkowskiraum, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

2.3 Die Spezielle Relativitätstheorie

Ist ds^2 größer als 0, dann ist $\frac{ds^2}{c^2}$ größer als 0, und wir können die rechte Seite der Gleichung als zeitliche Änderung $d\tau^2$ ansehen:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot dt^2 \quad \text{oder}$$

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot dt$$

Durch Integration erhalten wir dann für die zeitliche Änderung die Formel der Zeitdilatation:

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot dt \quad \text{oder}$$

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \Delta t \quad .$$

Die zeitliche Größe $\Delta\tau$ entspricht der Eigenzeit oder der Zeitmessung des bewegten Beobachters, der sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit v gegenüber einem dazu relativ ruhenden Beobachter bewegt. Sie wird auch mit $\Delta t'$ bezeichnet. Die zeitliche Größe Δt entspricht dann der Eigenzeit oder der Zeitmessung dieses ruhenden Beobachters.

Multipliziert man die Gleichung für die Zeitdilatation mit der Lichtgeschwindigkeit, so erhält man:

$$\Delta x' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \Delta x \quad . \text{oder mit der Bogenlänge parametrisiert.}$$

Dabei entspricht Δx der Eigenlänge eines Gegenstandes im ruhendem System und $\Delta x'$ die Länge des Gegenstandes, die der Beobachter im bewegten System misst. Damit erhalten wir folgende Ergebnisse:

1. Zeitdilatation: Bewegte Uhren laufen langsamer als ruhende Uhren. Der Faktor, um den die Uhr im bewegten Inertialsystem relativ zum ruhenden Inertialsystem X langsamer läuft ist

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad .$$

2. Längenkontraktion: Bewegte Längen werden kürzer gemessen als ruhende Längen. Nimmt ein Beobachter in einem bewegten Inertialsystem X' einen Gegenstand, dessen Länge im ruhenden

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Inertialsystem X mit der Länge $L_0 = \Delta x$ gemessen wurde, mit auf die Reise, dann wird der bewegte Beobachter ebenfalls die Länge $L_0 = \Delta x$ messen, weil der Gegenstand in seinem Inertialsystem in Ruhe ist. Für den ruhenden Beobachter erscheint der Gegenstand im X' Inertialsystem als bewegter Gegenstand mit der Länge $L = \Delta x'$. Die Länge L des bewegten Gegenstandes verkürzt sich also bezüglich der Ruhelänge L_0 um $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Bewegte Längen werden kürzer gemessen als ruhende Längen. Wird der Gegenstand von bewegten Beobachter in das System des ruhenden Beobachters geworfen und kommt dort zum Stillstand, dann misst der ruhende Beobachter die Länge des Gegenstandes größer als der bewegte Beobachter.

Wir können mit Einstein also für die Spezielle Relativitätstheorie folgende Postulate aufstellen:

Postulate der Speziellen Relativitätstheorie für Inertialsysteme:

1. Das Relativitätsprinzip: «Wird ein Koordinatensystem K so gewählt, daß in bezug auf dasselbe die physikalischen Gesetze in ihrer einfachsten Form gelten, so gelten dieselben Gesetze auch in Bezug auf jedes andere Koordinatensystem K' , das relativ zu K in gleichförmiger Translationsbewegung begriffen ist. Dieses Postulat nennen wir „spezielles Relativitätsprinzip“. (Albert Einstein, ANNALEN DER PHYSIK, VIERTE FOLGE, Band 49, S. 770, 1916)

2. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit: „Die spezielle Relativitätstheorie weicht also von der klassischen Mechanik nicht nur durch das Relativitätspostulat ab, sondern allein durch das Postulat der Konstanz der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, aus welchem im Verein mit dem speziellen Relativitätsprinzip die Relativität der Gleichzeitigkeit sowie die Lorentztransformation und die mit dieser verknüpften Gesetze über das Verhalten bewegter starrer Körper und Uhren in bekannter Weise folgen.«

(Albert Einstein, ANNALEN DER PHYSIK, VIERTE FOLGE, Band 49, S. 770, 1916)

Folgerung 1: Massenzunahme bewegter Massen

X' bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit entlang der x -Achse eines relativ dazu in Ruhe seienden Koordinatensystem X . Die y' und z' Koordinaten ändern sich also nicht: $y' = y$ und $x' = x$. Senkrecht zur Bewegungsrichtung entlang der y' -Koordinatenlinie bewegt sich eine Masse m_0 mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_0 . Der Impuls gemessen im X' System ist:

$$p = m_0 \cdot v'_0 = m_0 \cdot \frac{L}{t'}$$

Dabei ist m_0 die Masse gemessen im X' Inertialsystem. Im X Inertialsystem ändert sich wegen $y' = y$ die Länge L nicht. Die Geschwindigkeit v_0 wird wegen der Zeitdilatation allerdings kleiner ausfallen:

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$v_0 = \frac{L}{t} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot \frac{L}{t'} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot v'_0 .$$

Da der Impuls aber in beiden System gleich groß ist, muss $m_0 \cdot v'_0 = m \cdot v_0$ gelten. Dies geht

nur, wenn die Masse m sich vergrößert: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$

Folgerung 2: $E = mc^2$

In der Speziellen Relativitätstheorie ist der Impuls eines Körpers gegeben durch:

$$p = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot v .$$

Nach v aufgelöst erhält man:

$$v = \frac{c \cdot p}{\sqrt{c^2 \cdot m_0^2 + p^2}} .$$

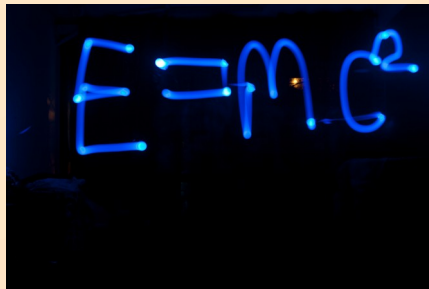
$$E = \int F \cdot ds = \int \frac{dF}{dt} ds = \int v \cdot dp = \int \frac{c \cdot p}{\sqrt{c^2 \cdot m_0^2 + p^2}} \cdot dp = \sqrt{c^4 \cdot m_0^2 + p^2 \cdot c^2}$$

Folgerung: Ein Körper, der sich in Ruhe $p=0$ befindet, hat eine Ruheenergie von

$$E = m_0 \cdot c^2 .$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Die erste Überprüfung der Speziellen Relativitätstheorie wurde über die Lebenszeit (Eigenzeit) des Myon experimentell nachgewiesen. Diese Teilchen entstehen durch die kosmische Strahlung in der oberen Atmosphäre der Erde. Da das Myon nur eine mittlere Lebensdauer von $2,1969811 \cdot 10^{-6}$ s hat, könnte es auf der Erde nicht nachgewiesen werden, auch wenn es sich mit annähernd Lichtgeschwindigkeit bewegt. Der Grund dafür, dass Myonen auch auf der Erdoberfläche detektiert werden können, liegt in der Zeitdilatation.



Quelle: <https://www.publicdomainpictures.net/en/view-image.php?image=151799&picture=e-mc2-albert-einstein>

Kapitel III: Die klassische Mechanik

3.1 Schwarzschildradius klassisch

Man betrachte eine kugelförmige Masseverteilung mit homogener Massendichte ρ also mit der Masse $M = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$, wobei R der Radius der Kugel ist. Die Beschleunigung außerhalb der Kugel ist dann nach Newton: $a(r) = \frac{G \cdot M}{r^2}$ mit $r \geq R$. Die Arbeit, um einen Körper mit Masse m aus dem Gravitationsfeld zu befördern, ist dann: $\int_R^\infty \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} dr = \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \Big|_R^\infty = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$. Da die kinetische Energie genauso groß sein muss, erhält man für die **Fluchtgeschwindigkeit**:

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{R} \quad \text{oder} \quad v^2 = \frac{2 G \cdot M}{R}.$$

Für lichtartige Punkte im Minkowskiraum gilt $v=c$. Damit ergibt sich:

$$R_E = \frac{2 G \cdot M}{c^2}, \quad \text{oder} \quad R_S = \frac{2 G \cdot M}{c^2}.$$

R_E ist also der Radius des Ereignishorizontes für eine kugelförmige Masseverteilung mit homogener Massendichte ρ . Man nennt diesen Radius auch Schwarzschildradius, weil er von Karl Schwarzschild¹⁵ als Lösung der einsteinschen Feldgleichungen gefunden wurde. Wir werden später darauf zurückkommen. Nach der Formel hat jedes Objekt, das eine Masse besitzt, einen Ereignishorizont. Bei der Masse unserer Sonne würde man für den Schwarzschildradius einen ungefähren Wert von ca. 3 km erhalten. In unserem Planetensystem würde das Licht ausgehen, wenn die Masse der Sonne sich in einer Kugel mit ca. 3 km Radius befände, oder wenn die Massendichte der Sonne entsprechend groß wäre. Für die Planetenbahnen hätte dies aber keine Auswirkungen.

Stellen wir uns ein Labor vor, dass sich im freien Fall auf ein Objekt befindet, das einen außerhalb des Objektes liegenden Schwarzschildradius hat. Im Labor werden in jeder Sekunde (Eigenzeit im Labor) Lichtimpulse ausgesendet, die ein relativ dazu ruhender Beobachter auf der Erde empfängt. Aufgrund der Zeitdilatation werden die Lichtimpulse mit immer größeren Abständen beim ruhenden Beobachter ankommen. Befindet sich das Labor im Ereignishorizont, so kann der Beobachter auf der Erde nichts mehr empfangen. Das Labor kann sich aber trotzdem weiter im freien Fall bewegen, wenn das kugelförmig Objekt mit homogener Masseverteilung einen Radius hat, der wesentlich kleiner als der Schwarzschildradius ist. Damit wird der Beobachter im Labor sich problemlos durch den Ereignishorizont auf das Objekt im schwerelosen freien Fall bewegen können. Die Signale, die er an den Beobachter auf der Erde schickt, werden dort allerdings nie ankommen.¹⁶

15 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Karl_Schwarzschild und https://de.wikipedia.org/wiki/Martin_Schwarzschild

16 Siehe: Seite 77 Minkowskiraum

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Die Formel für die Fluchtgeschwindigkeit¹⁷ $v^2 = \frac{2G \cdot M}{R}$ oder $v = \sqrt{\frac{2G \cdot M}{R}}$ erlaubt noch eine weitere Interpretation. Bewegt sich ein Beobachter mit derselben gleichförmigen Geschwindigkeit in einem Inertialsystem im gravitationsfreien Raum, so werden die Uhren dieses Beobachters in Bezug auf eine Uhr eines ruhenden Beobachters im gravitationsfreien Raum wegen der

Zeitdilatation um dem Faktor $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ langsamer laufen. Ersetzt man den bewegten Beobachter durch einen ruhenden Beobachter und die Geschwindigkeit des bewegten Beobachters durch die Fluchtgeschwindigkeit auf einem kugelförmigen Planeten mit Radius R , dann wird auch dessen Uhr gegenüber einem ruhenden Beobachter mit dem Faktor

$$\sqrt{1 - \frac{2G \cdot M}{R \cdot c^2}}$$
$$\sqrt{1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}}$$

langsamer gehen. In der zweiten Gleichung steht das Gravitationspotenzial $\Phi(r) = -\frac{G \cdot M}{r}$, das sich durch Integration der Beschleunigung $\vec{a}(r) = \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \vec{e}_r$ ergibt. Man nennt dieses Verhalten der Zeit die gravitative Zeitdilatation. Die Uhren auf dem Mond laufen also schneller als die Uhren auf der Erde. Und die Uhren auf der Erde laufen schneller als die Uhren auf der Sonne, falls es solche Uhren dort überhaupt geben kann.

Die Quantentheorie postuliert, dass sich Energie nur in kleinsten Größen ändern kann. Diese sprunghaften Änderungen der Energie wird mit dem Planckschen Wirkungsquantum beschrieben. Nach den physikalischen Gesetzen bedeutet dies aber auch, dass es entsprechenden Grenzen für die Messbarkeit von Längen und Zeiten und daraus abgeleitete Größen wie Beschleunigung und Frequenz geben muss. Die kleinste Länge ist die Plancklänge und entspricht dem Wert von $1,616 \cdot 10^{-35}$ m.

Berechnet man die Energie elektromagnetischer Strahlung, so erhält man nach Einstein: $E = h \cdot f$ oder $E = \hbar \cdot \omega$. Multipliziert man die Gleichung mit der Wellenlänge der elektromagnetischen Strahlung, so erhält man $\lambda \cdot E = h \cdot \lambda \cdot f = h \cdot c$. Aufgelöst: $\lambda = \frac{h \cdot c}{E}$. Setzt man für $E = m \cdot c^2$, so erhält man die Compton-Wellenlänge $\lambda_c = \frac{h}{m \cdot c}$. Den reduzierten Schwarzschildradius einer Masse m , kann man über $\tilde{r}_s = \frac{G \cdot m}{c^2}$ angeben. Multipliziert man mit der Compton-Wellenlänge, so

¹⁷ Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/John_Michell

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

erhält man: $\lambda_c \cdot \tilde{r}_s = \frac{G \cdot m}{c^2} \cdot \lambda_c = \frac{G \cdot m}{c^2} \cdot \frac{h}{m \cdot c} = \frac{G \cdot h}{c^3}$. Für die Plancklänge setzt man: $\lambda_c = \tilde{r}_s = l_p$.

Dies liefert die Formel für die Plancklänge: $l_p = \sqrt{\frac{G \cdot h}{c^3}}$.

Die Plancklänge ist die kleinste physikalische mögliche Länge. Objekte, die eine kleinere Länge hätten, würden sofort aus der physikalischen Welt verschwinden – wie ein Schwarzes Loch, dessen Inneres wir nicht messen können.

Die kleinste Zeit, die man theoretisch messen könnte, entspricht dann der Planck-Zeit und hat einen Wert von $5,391 \cdot 10^{-44}$ [s]. Damit erhält man über die Formel für die Lichtgeschwindigkeit $c = f \cdot \lambda$ für die größte Frequenz, die man messen könnte. Die Planck-Frequenz hat einen Wert von $1,855 \cdot 10^{43}$ [s⁻¹]. Für die Planck-Beschleunigung erhält man einen Wert von $5,56 \cdot 10^{51}$ [ms⁻²].

Wir haben schon den Ereignishorizont für ein schweres kugelförmiges Objekt mit homogener Massenverteilung berechnet. Dabei sind wir davon ausgegangen, dass das Objekt selbst einen kleineren Radius hat. Nimmt man nun an, dass an der Oberfläche des Objektes die Planck-Beschleunigung vorliegt, so erhalten wir für den Radius des Objektes folgende Abschätzung nach Newton:

$$a_{\text{Planck}} = \frac{G \cdot M}{R^2} \quad .$$

$$R = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a_{\text{Planck}}}} \quad .$$

Der Vergleich mit dem Radius für den Ereignishorizont $R_E = \frac{2G \cdot M}{c^2}$ liefert mit $G \cdot M = \frac{R_E \cdot c^2}{2}$:

$$a_{\text{Planck}} = \frac{R_E \cdot c^2}{2 R^2}$$

Damit erhält man für die kleinste Ausdehnung eines kugelförmigen Objekts mit homogener Masseverteilung:

$$R_{\text{Grenz}} = c \cdot \sqrt{\frac{R_E}{2 a_{\text{Planck}}}} \quad .$$

Dies entspricht einem Radius von ca.

$$R_{\text{Grenz}} \approx 2,845 \cdot 10^{-18} \cdot \sqrt{R_E} \quad .$$

Dies ist der kleinste Radius, den ein Schwarzes Loch annehmen kann. Er ist wesentlich kleiner als der Schwarzschildradius aber doch wesentlich größer als die Plancklänge. Ist die Massendichte des Schwarzen Lochs so bemessen, dass Radien zwischen $R_{\text{Grenz}} \leq R \leq R_E$ liegen, dann handelt es

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

sich um ein Schwarzes Loch. Die minimale Massendichte ergibt sich über den Schwarzschildradius R_E und die maximale Massendichte aus dem Radius R_{Grenz} .

Die Energie eines Photons berechnet sich zu $E=h \cdot f$. Dabei ist h das Plancksche Wirkungsquantum, das den Wert $6,626\,070\,040 \cdot 10^{-34}$ Js hat.

Wird ein Lichtstrahl auf ein Objekt gesendet, das eine große Masse besitzt, dann wird sich die Frequenz des Lichtstrahls erhöhen.

«In 1960, R. POUND and G. REBKA, Jr. at Harvard University conducted experiments in which photons (gamma rays) emitted at the top of a 22.57 m high apparatus were absorbed at the bottom, and photons emitted at the bottom of the apparatus were absorbed at the top. The experiment showed that photons which had been emitted at the top had a higher frequency upon reaching the bottom than the photons which were emitted at the bottom. And photons which were emitted at the bottom had a lower frequency upon reaching the top than the photons emitted at the top. These results are an important part of the experimental evidence supporting general relativity theory which predicts the observed "redshifts" and "blueshifts.»

Zitiert aus: <https://www.leifiphysik.de/quantenphysik/quantenobjekt-photon/versuche/photonen-im-gravitationsfeld>

Da die Frequenz des Photons höchstens die Planck-Frequenz annehmen kann, ist die maximale Energie des Photons $E=h \cdot f_{\text{Planck}}$. Photonen ändern bei Energieaufnahme nicht ihre Geschwindigkeit, weil die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum die maximale Geschwindigkeit ist, die wir mit physikalischen Apparaturen messen können. Deshalb erhöht sich die Frequenz des Photons. Wenn ein Photon sich auf dem Weg auf ein Schwarzes Loch befindet, kann es also als Photon überleben, wenn zwischen dem Ereignishorizont und dem Radius des Schwarzen Lochs noch genügend Abstand vorhanden ist. Aber was passiert mit dem Photon, wenn es schon vorher die Grenzfrequenz erreicht hat? Auch hier gibt die Spezielle Relativitätstheorie eine Antwort:

$$E = m_0 \cdot c^2$$

$$\frac{h \cdot f_{\text{Planck}}}{c^2} = m_0$$

Die maximale Energie eines Photons bei der Planck-Frequenz entspricht einer Ruhemasse von ca.:

$$m_0 = 1,366 \cdot 10^{-7} \text{ kg}.$$

Wenn im Fahrstuhl eine Lichtquelle ist, dann würden diese Effekte im freien Fall auf ein Schwarzes Loch auftreten, wenn die Gezeitenkräfte entsprechend stark genug sind. Die Stärke der Gezeitenkräfte erhält man näherungsweise über die Änderungsrate der Gravitationskraft:

$$dF(R) = \frac{d}{dR} \left(\frac{G \cdot m \cdot M_{\text{SL}}}{R^2} \right) \cdot dR \quad \text{oder} \quad F_{\text{Gez}} = G \cdot \frac{m \cdot M_{\text{SL}} \cdot 2 \cdot \Delta r}{R^3}.$$

Dabei ist m die Masse eines Objektes mit dem Radius Δr und dem Abstand R vom Schwarzen Loch mit der Masse M_{SL} . Das

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Licht auf seinem Weg von der Lichtquelle zum Ende des Fahrstuhls würde immer kurzweiliger werden. Am Ende des Fahrstuhls würde es für einen Menschen dunkel sein, weil inzwischen durch die Blauverschiebung unsichtbares UV-Licht beim Beobachter ankommt. Da aber

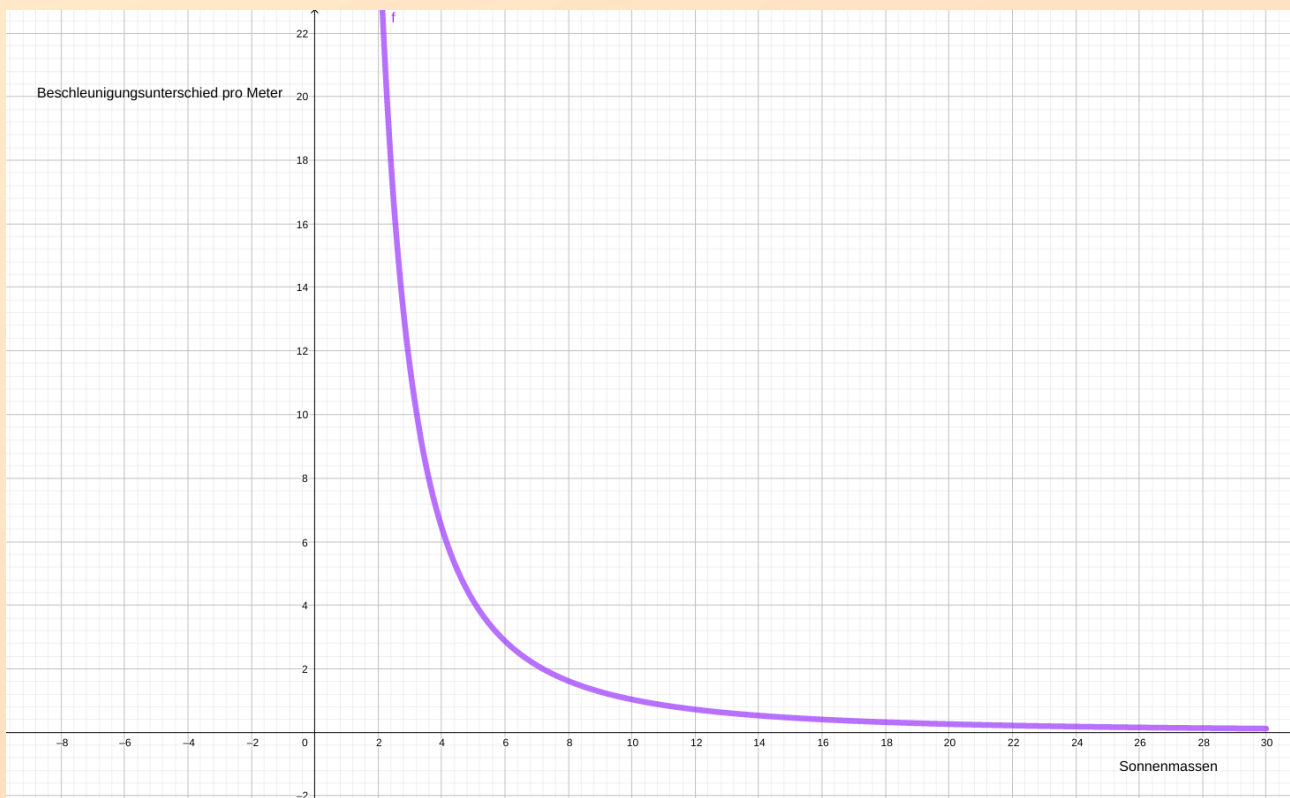
$R = \Delta r + \frac{2 \cdot G \cdot M_{SL}}{c^2}$ ist, zeigt die Formel auch, dass Schwarze Löcher mit einem sehr großen

Ereignishorizont $R_S = \frac{2 \cdot G \cdot M_{SL}}{c^2}$ geringere Gezeitenkräfte aufweisen als Schwarze Löcher mit

kleinerem Ereignishorizont. Vernachlässigt man $\Delta r \ll R_S$, dann vereinfacht sich die Rechnung zu:

$$F_{Gez} = \frac{m \cdot \Delta r \cdot c^6}{4 \cdot G^2 \cdot M_{SL}^2} = \frac{m \cdot \Delta r \cdot c^2}{R_S^2} = \Delta r \cdot \frac{E}{R_S^2}, \text{ was zeigt, dass die Gezeitenkräfte nahe des}$$

Ereignishorizontes mit dem Quadrat der Masse des Schwarzen Lochs abnimmt. Die Person im Fahrstuhl könnte also verstrahlt werden, und die Gezeitenkräfte könnten sie in Einzelteile zerlegen, wenn das Schwarze Loch wegen geringer Masse einen kleineren Schwarzschildradius R_S aufweist.



Beschleunigungsunterschied pro Meter am Ereignishorizont eines Schwarzen Lochs

Der **Breit-Wheeler-Effekt** beschreibt, wie sich Licht in Materie umwandeln lässt. Durch Photonenkollision wird ein Elektron-Positron Paar erzeugt. Stuard Mangles, Physiker am Imperial College London und Kollegen vom Max-Planck-Institut für Kernphysik wollen durch eine bestimmte Versuchsanordnung durch die Kollision zweier Laser Photonen Energie in Materie umwandeln, um somit den Breit-Wheeler-Effekt experimentell nachzuweisen. Welche Frequenz die Photonen haben müssen, kann man dann über $h \cdot f = m \cdot c^2$ berechnen.

3.2 Schwarzschilddichte und Ereignishorizont des Universums

Wir wollen den Schwarzschildradius, also den Radius des Ereignishorizontes $R_E = \frac{2G \cdot M}{c^2}$, für eine Sonnenmasse berechnen. Setzt man die Werte für die Sonnenmasse $1,98892 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ und die Gravitationskonstante aus der Abbildung unten ein, so erhält man einen Wert von ca. 2950 m oder ca. drei Kilometer Schwarzschildradius pro Sonnenmasse.

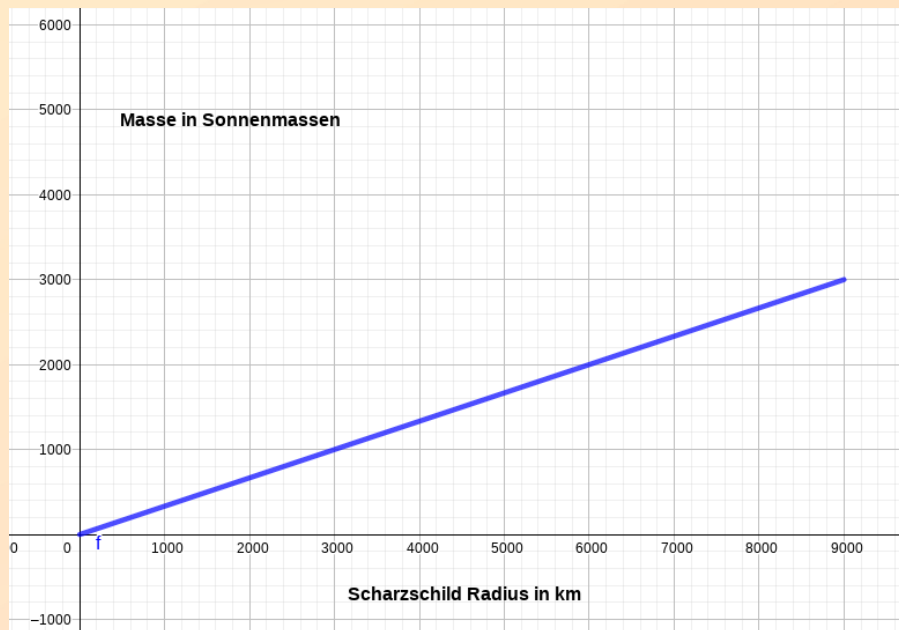


Abbildung: Linearer Zusammenhang zwischen Schwarzschildradius und Sonnenmassen, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Folgende Überlegungen sollen zeigen, dass es auch einen Ereignishorizont gibt, obwohl die Massendichte sehr klein ist. Aus der Formel für den Schwarzschildradius $R_E = \frac{2G \cdot M}{c^2}$ erhält

man für das Schwarzschildvolumen $V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_E^3$, oder $V_E = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \frac{8 \cdot G^3 \cdot M^3}{c^6}$.

Damit ergibt sich für die Schwarzschilddichte $\rho_E = \frac{M}{V_E}$ ein Wert von:

$$\rho_E = \frac{3 \cdot c^6}{32 \cdot \pi \cdot G^3 \cdot M^2}.$$

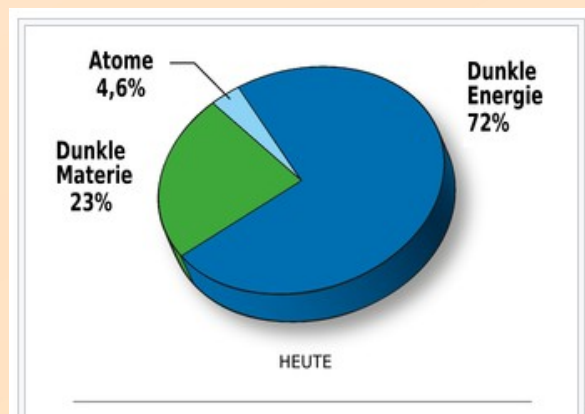
Man sieht aus dieser Formel, dass man für entsprechende große Massen entsprechend geringe Massendichten ρ erhält.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

| Physikalische Eigenschaften (bezogen auf das beobachtbare Universum) | |
|--|--|
| Radius | > 45 Mrd. Lj ^[1] |
| Masse (sichtbar) | ca. 10^{53} kg |
| Mittlere Dichte | ca. $4,7 \cdot 10^{-30}$ g/cm ³ |
| Alter | $13,81 \pm 0,04$ Mrd. Jahre ^[2] |
| Anzahl Galaxien | ca. 200 Mrd. ^[3] |
| Temperatur Hintergrundstrahlung | 2,7 K |

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Universum>

Berechnet man den Schwarzschildradius des sichtbaren Universums aus obigen Daten, so liefert das einen Wert von ca. $1,5 \cdot 10^{23} \text{ km} = 1,5 \cdot 10^{26} \text{ m}$, wenn man den Näherungswert von $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ für die Sonnenmasse nimmt. Damit ist der Ereignishorizont des Universums ca. $1,5856 \cdot 10^{10} \text{ Lj}$, das entspricht ca. **16 Mrd. Lj**. Wenn innerhalb dieser Grenze die gesamte sichtbare Materie sein sollte, dann darf der Ereignishorizont des Universums nicht kleiner sein. Dies würde ja bedeuten, dass ein Teil des sichtbaren Universums außerhalb des Ereignishorizontes des sichtbaren Universums läge.

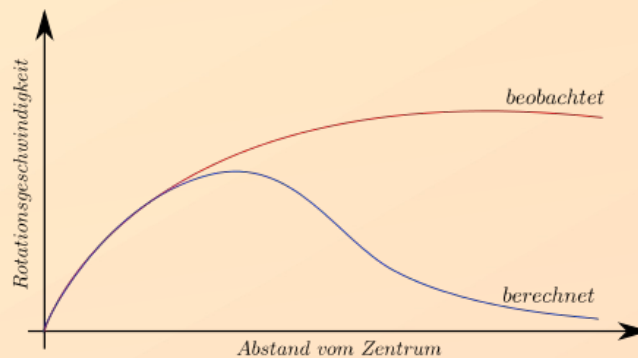


Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Dunkle_Materie

In der Abbildung ist zu sehen, dass man heute davon ausgeht, dass das Universum zu ca. 23 % aus Dunkler Materie und ca. 4 % aus normaler Materie besteht. Das bedeutet, dass **ca. 5,75 Mal** soviel Dunkle Materie wie sichtbare Materie im Universum vorhanden ist. Dadurch erhöht sich die Masse des Universums um das **6,75-fache** der sichtbaren Masse und somit auch das **6,75-fache** des soeben berechneten Radius des Ereignishorizontes. Jetzt ist es überhaupt erst möglich, dass unser Universum einen Ereignishorizont haben kann, der größer als der geschätzte Radius unseres Universums ist und so auch genügend Platz für die sichtbare Materie hat. Die dunkle Materie wurde durch Beobachtung der Umlaufgeschwindigkeiten von Sternen und Zwerggalaxien in

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Außenbezirken (siehe folgende Abbildung) von Galaxien entdeckt. Siehe dazu auch <https://www.youtube.com/watch?v=A8bBhkhZtd8>.



Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Dunkle_Materie

Wie man sieht, lässt es sich innerhalb eines Ereignishorizontes recht gut leben, wenn die Massendichte nicht allzu groß ist. Und die geschätzte Massendichte des Universums ist ja sehr gering, aber nicht konstant. Im Gegenteil, unser Universum dehnt sich mit immer größer werdender Geschwindigkeit aus. Die Massendichte wird also noch kleiner werden im Laufe der Zeit. Also muss es eine Ursache für diese Ausdehnung geben. Die Erklärung dafür ist die Dunkle Energie, die gemäß Abbildung den größten Anteil von geschätzt ca. 72 % der angenommenen gesamten Energie im Universum ausmacht. Die Dunkle Energie, die vielleicht von außerhalb des Ereignishorizontes unseres Universums stammt? Jedenfalls würden Bewohner dieser Region der Dunklen Energie nichts von unserem Universum bemerken, weil es sich hinter dem Ereignishorizont versteckt, so wie sich ein **Schwarzes Loch** hinter seinem Ereignishorizont vor uns versteckt.

3.3 Hamiltonsche Mechanik¹⁸

Die Hamiltonsche Mechanik untersucht Bewegungen im Phasenraum, der durch die Ortskoordinaten $q=(q_1,\dots,q_n)$ und Impulskoordinaten $p=(p_1,\dots,p_n)$ gegeben ist. Die Hamiltonsche-Funktion $H(t,q,p)$ eines Systems von Teilchen ist ihre Energie als Funktion des Phasenraums. Sie bestimmt die zeitliche Entwicklung der Teilchen bezüglich ihres Aufenthaltsortes und ihres Impulses. Dabei gelten folgende Gleichungen:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \text{und} \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

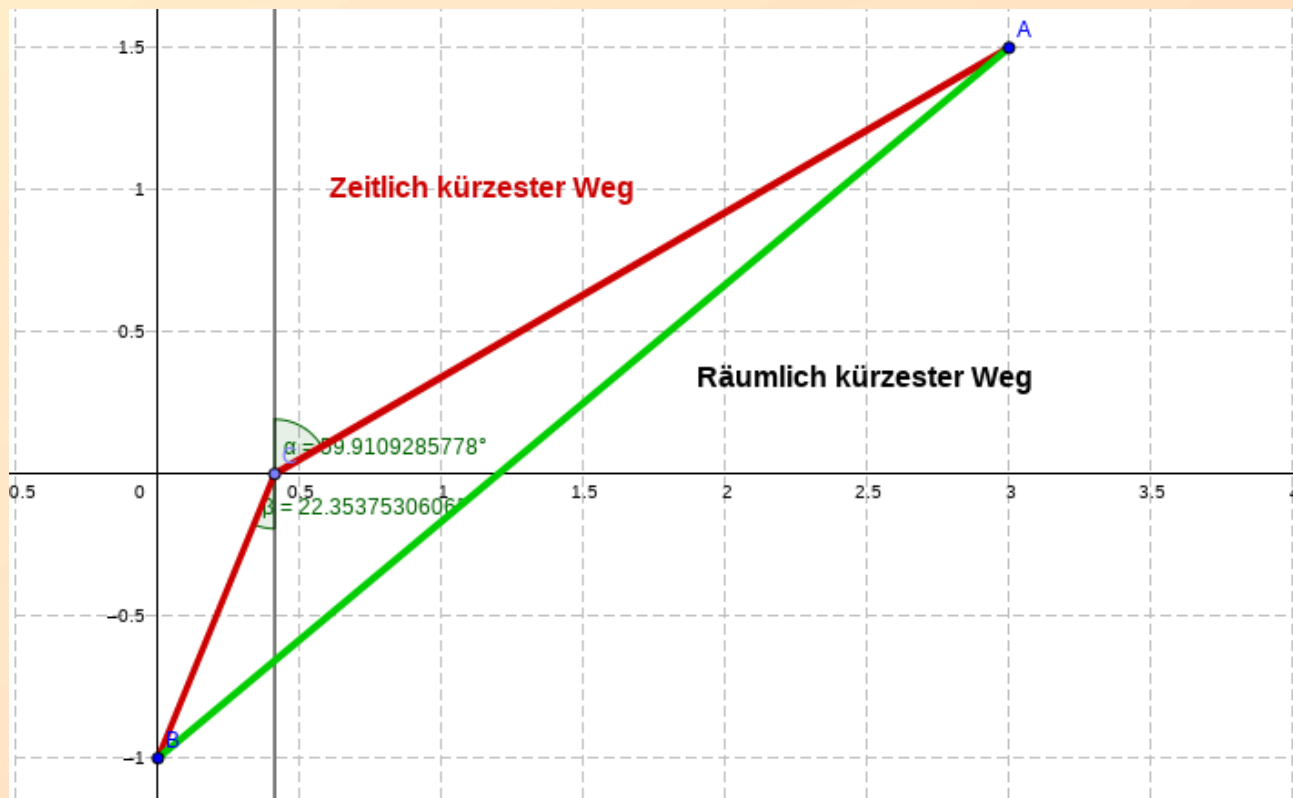
Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen folgt aus dem Hamiltonschen Prinzip der stationären Wirkung. Physikalische Felder und Teilchen nehmen danach für eine bestimmte Größe einen Extremwert (Minimum oder Maximum) an. Die Wirkung erweist sich in vielen Fällen nicht als minimal, sondern nur als **stationär**, d. h. extremal.

18 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton

3.3.1 Das Fermatsche Prinzip

Ein Beispiel ist das Fermatsche Prinzip, nach dem ein Lichtstrahl in einem Medium von allen denkbaren Wegen vom Anfangspunkt zum Endpunkt den Weg mit der geringsten Laufzeit durchläuft.

Dies wollen wir am Beispiel der Lichtbrechung ausrechnen.



Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Das Licht bewegt sich von Punkt A nach Punkt B. Die Grenze zwischen beiden Medien bildet die x-Achse. Oberhalb der x-Achse ist Luft mit einer angenommenen Lichtgeschwindigkeit von 300.000 km/s. Unterhalb der x-Achse ist ein Medium, in der die Lichtgeschwindigkeit kleiner ist – also Wasser oder Glas. Eine L.E. entspricht einer Lichtsekunde, sodass die Längen die Zeiten widerspiegeln, die das Licht in dem Medium benötigt. Dabei ist die Zeit im dichteren Medium größer, weil dort die Lichtgeschwindigkeit kleiner ist. Der Proportionalitätsfaktor entspricht dem Kehrwert des Brechungsindex.

Man kann diesen Sachverhalt ganz elementar mittels der 1. Ableitung, die aus der Schule bekannt ist, nachweisen.

Bei dem gewählten Koordinatensystem soll x der Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der Grenzfläche zwischen den unterschiedlichen Medien sein. Die Lichtgeschwindigkeit im dichteren Medium soll

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

um den Faktor $0 < k < 1$ kleiner sein als die Lichtgeschwindigkeit im dünneren Medium, also im Vakuum oder in Luft.

Der Satz des Pythagoras liefert dann folgende Gleichungen:

$x^2 + B_y^2 = (k \cdot c \cdot t_2)^2$, und $(A_x - x)^2 + A_y^2 = (ct_1)^2$ mit der Bedingung: $t_1 + t_2 = t$ soll minimal werden.

Eliminiert man t_1 und t_2 aus den beiden Gleichungen, so erhält man für die zu minimierende

Größe t : $t = \frac{\sqrt{x^2 + B_y^2}}{kc} + \frac{k \cdot \sqrt{(A_x - x)^2 + A_y^2}}{kc}$. Die rechte Seite hängt nicht mehr von der Zeit ab und

man kann deshalb die Extremwerte von $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + B_y^2}}{kc} + \frac{k \cdot \sqrt{(A_x - x)^2 + A_y^2}}{kc}$ berechnen, um darüber die Extremstelle x auszurechnen. $f(x)$ ist dann extremal.

Wir vereinfachen die Gleichung, indem wir $c=1$, $B_y = -1$, $A_x = A_y = 1$ setzen. Damit erhalten wir die Funktion:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + k \cdot \sqrt{(1-x)^2 + 1}}{k}$$

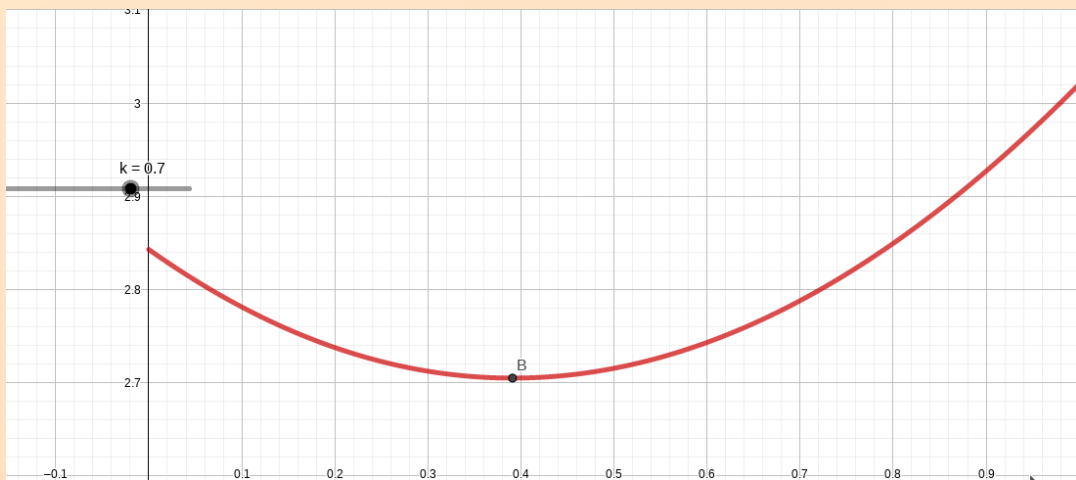


Abbildung: Extremum für $k=0,7$ bei $x = 0,390953$, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Der zeitlich kürzeste Weg liegt also bei $x=0,390953$ während der räumlich kürzeste Weg bei $x=0,5$ läge. Berechnet man die entsprechenden Winkelverhältnisse, so erhält man das Brechungsgesetz aus der Schulphysik.

In der Mechanik ist die Wirkung das zeitliche Integral über die sogenannte Lagrangefunktion:

$$L(t, x, v)$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Der Lagrangeformalismus ist in der Physik eine 1788 von Joseph-Louis Lagrange¹⁹ eingeführte Formulierung der klassischen Mechanik. Die Dynamik eines Systems wird durch eine einzige skalare Funktion, die Lagrangefunktion, beschrieben. Der Formalismus ist (im Gegensatz zu der Newtonschen Mechanik, die *a priori* nur in Inertialsystemen gilt) auch in beschleunigten Bezugssystemen gültig. Der Lagrangeformalismus ist invariant gegen Koordinatentransformationen. Aus der Lagrangefunktion lassen sich die Bewegungsgleichungen mit den Euler-Lagrange-Gleichungen der Variationsrechnung aus dem Prinzip der kleinsten **Wirkung** bestimmen. Diese Betrachtungsweise vereinfacht viele physikalische Probleme.

In der Newtonschen Mechanik ist die Lagrangefunktion durch die Differenz zwischen kinetischer und potenzieller Energie gegeben:

$$L(t, x, v) = \frac{1}{2} \cdot mv^2 - V(t, x)$$

Die Wirkung ordnet jeder Kurve γ , die ein Teilchen zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 durchläuft, folgenden Wert $S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x(t), v(t)) dt$ zu.

Das Hamiltonsche Prinzip besagt nun, dass von allen denkbaren Bahnen, die anfänglich durch $x(t_1)$ und $x(t_2)$ laufen, diejenigen Bahnen in der Natur durchlaufen werden, die eine stationäre Wirkung haben. Dies bedeutet, dass die Euler-Lagrange-Gleichung gilt:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = 0 \quad .$$

Setzen wir die Lagrangefunktion der Newtonschen Mechanik in die Euler-Lagrange-Gleichung ein so erhält man die Newtonschen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \cdot mv^2 - V(t, x) \right) - \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{2} \cdot mv^2 - V(t, x) \right) &= 0 \\ -\text{grad } V - m \cdot \vec{a} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

19 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange

3.3.2 Brachistochrone

Wir wollen das Hamiltonsche Prinzip am Problem der Brachistochrone verdeutlichen. Dabei fragt man sich, auf welcher Bahn sich ein Teilchen bewegen muss, damit es in kürzester Zeit von einem Anfangspunkt A zu einem Endpunkt B nur unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung bewegen kann.²⁰

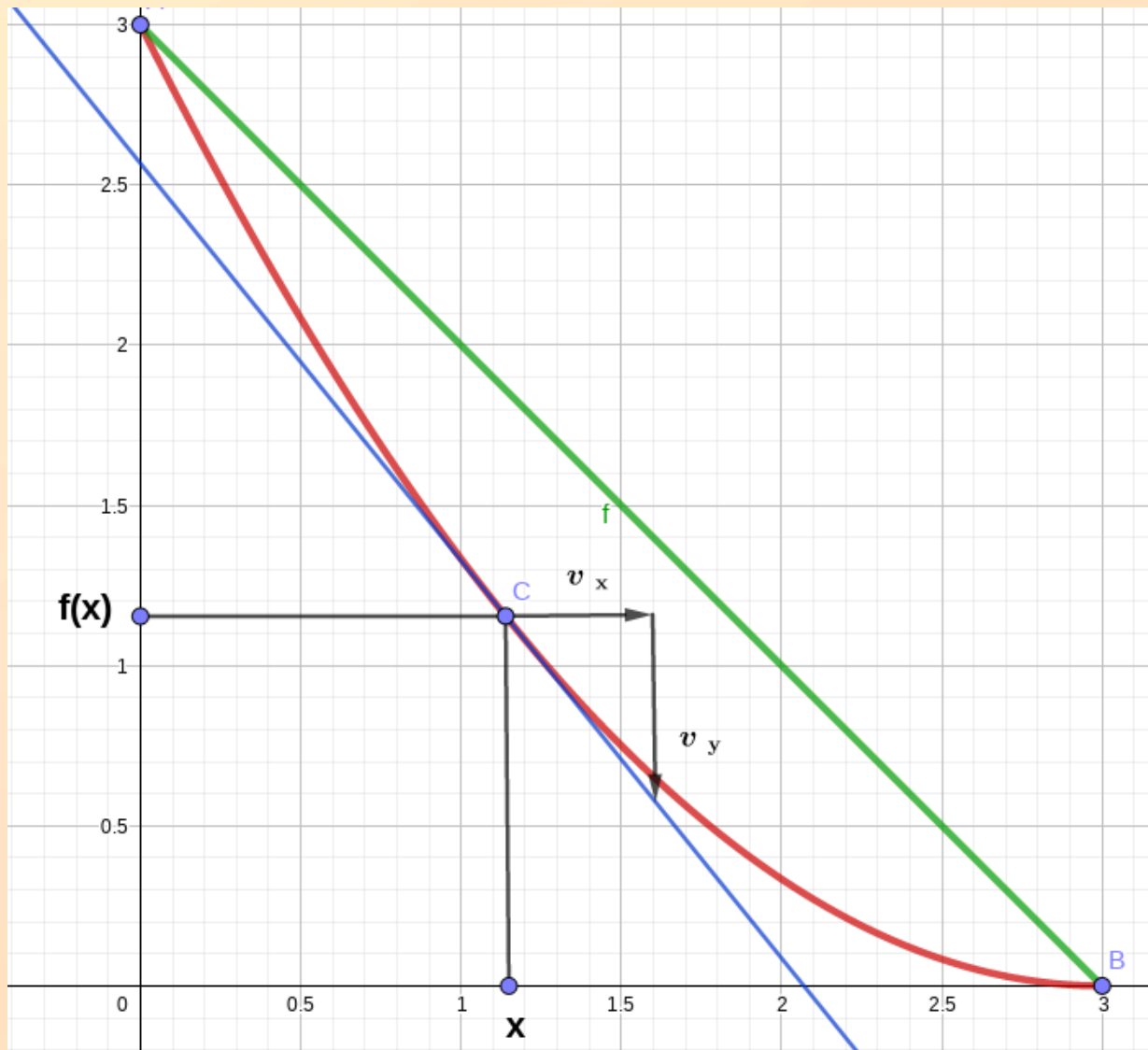


Abbildung: Zwei unterschiedliche Kurven, auf denen sich das Teilchen von A nach B unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung bewegen kann, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Für die y Koordinate von C gilt: $y = f(x)$. Außerdem ist die 1. Ableitung von $f(x)$ gleich dem Quotienten der Geschwindigkeitskomponenten v_y und v_x : $f'(x) = \frac{v_y}{v_x}$ nach dem

²⁰ Siehe: <https://www.youtube.com/watch?v=OKjUqPps8vM>

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Energieerhaltungssatz gilt: $\frac{1}{2}v^2 + m \cdot g \cdot y = m \cdot g \cdot y_0$. Mit $f(0) = y_0$. Damit erhält man:

$$v^2 = 2g \cdot (y_0 - y) = 2g \cdot (f(0) - f(x)). \text{ Für } v^2 \text{ gilt nach dem Satz des Pythagoras: } v^2 = v_x^2 + v_y^2.$$

Nutzt man $v_y = f'(x) \cdot v_x$ aus, dann erhält man: $v_x = \sqrt{\frac{2g \cdot (f(0) - f(x))}{1 + f'(x)^2}}$.

$$v_x = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{f(0) - f(x)}{1 + f'(x)^2}}$$

$$v_y = \sqrt{2g} \sqrt{\frac{f(0) - f(x)}{1 + f'(x)^2}} \cdot f'(x)$$

Wie man sieht hängen die Geschwindigkeitskomponenten nicht mehr von der Zeit, sondern nur von der Kurve $f(x)$ ab. Damit kann man dann über $v_x = \frac{dx}{dt}$ die zeitliche Änderung zu

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{f(0) - f(x)}} dx \text{ berechnen und die benötigte Zeit durch Integration}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_e} \sqrt{\frac{1 + f'(x)^2}{f(0) - f(x)}} dx.$$

Interessant ist, dass der Integrand eine Definitionslücke bei $x = 0$ hat, weil dann der Nenner verschwindet. Das Integral existiert aber trotzdem. Laut Abbildung ist die Gerade durch die Funktion $f(x) = 3 - x$ darstellbar während es sich bei der zweiten Funktion um

$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$ handelt. Das Herunterrollen entlang der schiefen Ebene benötigt eine Zeit von ca. $T \approx 1,106$ Sekunden, wenn man für $g \approx 9,81$ wählt. Das Herunterrollen entlang der Parabel dauert aber nur $T \approx 1,03044$ Sekunden.²¹

Gesucht ist also eine Funktion $f(x)$, für die die reibungsfreie Abrollzeit eines Körpers z. B. eines Tennisballs minimal wird.²²

Die Funktion, die minimiert werden soll lautet: $L(x, y, y') = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y_0 - y}}$ mit $y = f(x)$.

²¹ Berechnungen mit CAS durchgeführt

²² Siehe: <http://www.math.odu.edu/~jhj/ch54.PDF>

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Die notwendige Bedingung für eine Funktion y , sodass $\int_0^{x_e} L(x, y, y') dx$ extremal wird, lautet dann:

$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$. Hier ist die Wirkung, die extrem werden soll, nicht mehr abhängig von der Zeit t , wie es bei den originalen Gleichungen der Fall ist. Die Wirkung, die extrem werden soll, hängt bei uns von x ab. Es gilt aber: $dx = \frac{dy}{y'}$ und somit: $\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dy} y' \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$ worüber man durch Integration folgende Gleichung erhält:

$$y' \cdot \frac{\partial L}{\partial y'} - L = K.$$

Es gilt: $y' \frac{\partial L}{\partial y'} = y' \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{y'^2}{\sqrt{(1+y'^2) \cdot (y_0-y)}}$

und damit:

$$\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{y'^2}{\sqrt{(1+y'^2) \cdot (y_0-y)}} - \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y_0-y}} = K$$

oder $\frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{-1}{\sqrt{(1+y'^2) \cdot (y_0-y)}} = K$.

Weitere Umformungen liefern: $(1+y'^2) \cdot (y_0-y) = \frac{1}{2gK} = C$

oder $(1+y'^2) = \frac{C}{y_0-y}$ bzw. $y' = \sqrt{\frac{C}{y_0-y} - 1}$

Damit können wir die Differenziale separieren und erhalten als Lösung:

$$\sqrt{\frac{y_0-y}{C-(y_0-y)}} dy = dx$$

Das Integral hat leider keine elementare Lösung. Deshalb substituiert man $y = y_0 - C \sin^2 \theta$ bzw. $dy = 2C \sin \theta \cos \theta d\theta$ und erhält aus obiger Gleichung:

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$\sqrt{\frac{y_0 - y}{C - (y_0 - y)}} dy = \sqrt{\frac{C \sin^2 \theta}{C - C \sin^2 \theta}} 2C \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\sqrt{\frac{C \sin^2 \theta}{C - C \sin^2 \theta}} 2C \sin \theta \cos \theta d\theta = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}} 2C \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta}} 2C \sin \theta \cos \theta d\theta = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} 2C \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$\sqrt{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} 2C \sin \theta \cos \theta d\theta = 2C \sin^2 \theta d\theta$$

$$dx = 2C \sin^2 \theta d\theta$$

Dies liefert die Lösung für x :

$$x(\theta) = 2C \int \sin^2 \theta d\theta = x_0 + C(\theta - \sin \theta \cos \theta) .$$

Mittels der Additionstheoreme für die Winkelfunktionen erhält man:

$$x(\theta) = x_0 + C\left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) .$$

Mit $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ ergibt sich für y :

$$y(\theta) = y_0 + \frac{C}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

Die Bewegung in der Abbildung startet bei $x_0 = 0$ und dies liefert dann $\theta = 0$. Damit ist auch die Bedingung für y_0 erfüllt. Die Bewegung hört bei $(3|0)$ auf. Dies liefert: $3 = C\left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)$

und $0 = 3 + \frac{C}{2}(1 - \cos 2\theta)$ oder $-6 = C(1 - \cos 2\theta)$. Dividiert man, so liefert das:

$$1 - \cos 2\theta = \sin 2\theta - 2\theta . \text{ Dies liefert } \theta \approx -1,20601 \text{ und für } C = \frac{6}{2\theta - \sin 2\theta} \approx -3,43747 .$$

$$x(\theta) = -3,43747\left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right) , \quad y(\theta) = 3 - \frac{3,43747}{2}(1 - \cos 2\theta)$$

im Bereich $-1,20601 \leq \theta \leq 0$.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

In der folgenden Abbildung ist die schnellste Bahnkurve als rot eingezeichnete Kurve zu sehen. Sie fällt anfangs sehr schnell ab. Dies bedeutet, dass bei Bewegungsanfang fast die volle Erdbeschleunigung wirkt und somit das Teilchen maximal beschleunigt. Ab einem bestimmten Bereich fällt die Kurve fast wie eine Gerade, was bedeutet, dass in diesem Bereich die Beschleunigung sich nur wenig ändert. Die schwarze Gerade ist die Abrollkurve auf einer Schiefen Ebene. Hier ist die Beschleunigung während der gesamten Bewegung konstant. Die lila Kurve ist die Abrollkurve einer Parabel. Hier nimmt die Beschleunigung von einem Anfangswert stetig ab und ist im Endpunkt 0.



Abbildung: Die rote Kurve ist der Weg, auf dem ein Körper abrollen muss, um in kürzester Zeit von A nach B zu kommen, Quelle: Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Bemerkung: Die Lösung ist Teil einer Zykloide, die als Bewegung eines Punktes auf einem Kreis entsteht, der sich waagerecht mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

Kapitel IV: Die Feldgleichungen

4.1 Die Feldgleichungen im materiefreien²³ Raum

4.1.1 Die Bedingungen an die Feldgleichungen

Die Feldgleichungen im materiefreien Raum entsprechen Bezugssystemen, die das einsteinsche Postulat²⁴: „In einem kleinen Labor, dass in einem Gravitationsfeld frei fällt, sind die Gesetze der Physik dieselben wie in einem Labor, das sich im gravitationsfreien Raum befindet und sich dort mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.“ erfüllen.

Wir hatten in Kapitel 1.2.1 solche frei fallenden Bezugssysteme kennengelernt. Damit sind die Bewohner der ISS bei ihrem langen Aufenthalt in der Schwerelosigkeit auch schwerwiegenden körperlichen Nachteilen ausgesetzt.²⁵

In einem Labor, das sich im gravitationsfreien Raum befindet und sich dort mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, gelten die Gesetze der Speziellen Relativitätstheorie. Wir können also das Äquivalenzprinzip wie folgt formulieren: Raumzeit **ohne** Gravitation ist ein Minkowskiraum, Raumzeit **mit** Gravitation ist **lokal** wie ein Minkowskiraum. Deshalb muss sich der metrische Tensor der Raumzeit mit Gravitation in einem Punkt auf **einen** metrischen Tensor des Minkowskiraums transformieren lassen. Bezeichnet man den metrischen Tensor des Minkowskiraums ohne Gravitation mit η , dann müssen folgenden Transformationsgleichungen in einem Punkt $P=(q_0^1, \dots, q_0^4)$ erfüllt sein:

$$g_{nm} = \eta_{mn} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{nm}}{\partial q^i \partial q^j} q^i q^j \quad \text{mit} \quad \frac{\partial g_{nm}}{\partial q^i} \Big|_P = 0$$

Der mathematische Hintergrund für eine solche Metrik ist der Trägheitssatz von J. J. Sylvester.²⁶ Die Metrik g_{ij} lässt sich in einer Orthonormalbasis als Diagonalmatrix mit Einträgen ± 1 darstellen. Hat die Matrix r Einträge $+1$ und s Einträge -1 , so spricht man von einer Metrik mit Trägheit, bzw. Signatur (r,s) . Die Minkowskimetrik hat also die Signatur $(1,3)$ oder $(3,1)$. Die Metrik auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit lässt sich also lokal so transformieren, dass sie einer Metrik im Minkowskiraum entspricht.

Die Gesetze der Physik, die sich in diesem kleinen Labor nicht ändern, sind die Gesetze der Energie- und Impulserhaltung. Das bedeutet, dass folgende Gleichungen in diesen Bezugssystemen erfüllt sein müssen, die aus dem hamiltonschen Wirkungsprinzip folgen:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

23 ANNALEN DER PHYSIK, VIERTE FOLGE, s. 802, Band 49, 1916

24 Siehe Seite 83

25 Siehe: <https://www.spektrum.de/magazin/der-mensch-in-der-schwerelosigkeit/824981>

26 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/James_Joseph_Sylvester

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = 0$$

Die Komponenten der Beschleunigung sind in der Raumzeit in allgemeinen Koordinaten durch die Gleichung²⁷: $a^i = \frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{mn}^i \frac{dq^m}{dt} \frac{dq^n}{dt}$ gegeben. Damit hat man Bewegungsgleichungen analog

zum Newtonschen Aktionsprinzip: $m \cdot a^i = F^i$. Ist $F^i = 0$, folgt: $\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{mn}^i \frac{dq^m}{dt} \frac{dq^n}{dt} = 0$ oder

$\frac{d^2 q^i}{dt^2} = -\Gamma_{mn}^i \frac{dq^m}{dt} \frac{dq^n}{dt}$. Parametrisiert man nach der Bogenlänge $s = \int \sqrt{g_{ij} \frac{dq^i}{dt} \frac{dq^j}{dt}} dt$, so erhält man:

$$\frac{d^2 q^i}{ds^2} = -\Gamma_{mn}^i \frac{dq^m}{ds} \frac{dq^n}{ds} \quad \text{mit} \quad ds^2 = g_{ij} \cdot dq^i \cdot dq^j.$$

Die Gleichung beschreibt Geodäten in der Raumzeit, die als eine Riemannsche Mannigfaltigkeit²⁸ aufgefasst wird. Handelt es sich also um ein Bezugssystem, das im Gravitationsfeld frei fällt, dann ist die Kurve dieses Bezugssystems in der Raumzeit eine geodätische Kurve. Verschwinden die Christoffelsymbole, so handelt es sich um eine gradlinig, gleichförmige Bewegung in einer flachen Raumzeit. Die Christoffelsymbole beschreiben also die Abweichung der Bewegung in der gekrümmten Raumzeit von der Gleichförmigkeit der Bewegung in der flachen Raumzeit. Sie sind die Komponenten des Gravitationsfeldes.²⁹

”Matter tells space how to curve and spacetime tells matter how to move!”³⁰

²⁷ Siehe Seite 74

²⁸ Siehe Kapitel 5.3.1

²⁹ Siehe: ANNALEN DER PHYSIK, VIERTE FOLGE, s. 802, Band 49, 1916

³⁰ Zitiert nach J.A. Wheeler: https://de.wikipedia.org/wiki/John_Archibald_Wheeler

4.2 Die Bewegungsgleichungen der ART in Newtonscher Näherung

Wir hatten als Bewegungsgleichung $\frac{d^2 q^i}{ds^2} = -\Gamma_{mn}^i \frac{dq^m}{ds} \frac{dq^n}{ds}$ gefunden. In der klassischen Newtonschen Mechanik gilt: $\vec{a} = -\nabla \Phi$ mit dem Gravitationspotenzial Φ . Die Bewegungsgleichungen folgen aus dem Hamiltonschen Prinzip mit der relativistischen Lagrangefunktion: $L(t, x, v) = \frac{1}{2}mv^2 - m\Phi - mc^2$, wobei außer der kinetischen Energie T die Ruheenergie mc^2 mit berücksichtigt wird. Klammert man mc^2 aus, so lautet die Lagrangefunktion:

$$L = -mc^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) \right) .$$

Ist die Größe $\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right)$ **klein**, so hat man in 1. Näherung über die **Taylorreihe** von $\sqrt{1+x}$ die Abschätzung: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$. Dies liefert:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 + \left(\frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right)} = -mc \sqrt{c^2 \left(1 + \left(\frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) \right)}$$

$$L = -mc \sqrt{c^2 \left(1 + \left(\frac{2\Phi}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) \right)}$$

$$L = -mc \sqrt{c^2 + 2\Phi - v^2}$$

Nach dem hamiltonschen Prinzip bewegt sich ein Teilchen von einem Punkt P_1 zu einem anderen Punkt P_2 auf derjenigen Kurve c , für die das Integral $\int_{P_1}^{P_2} L dt$ extremal wird oder die Variation

$\delta \int_{P_1}^{P_2} L dt = 0$ ist. Wir erhalten für $L dt$ den Ausdruck $L dt = -mc \sqrt{c^2 dt^2 + 2\Phi dt^2 - v^2 dt^2}$ und mit $v = \frac{ds}{dt}$ erhält man: $L dt = -mc \sqrt{c^2 dt^2 + 2\Phi dt^2 - ds^2}$.

Da $-ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2$ in kartesischen Koordinaten gilt, folgt:

$L dt = -mc \sqrt{(c^2 + 2\Phi) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}$. Damit haben wir die Bewegungsgleichungen in lokalen Bezugssystem gefunden. Der Metriktensor ist:

$$ds^2 = (c^2 + 2\Phi) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

$$ds^2 = c^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2} \right) dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

oder in Matrixschreibweise:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\Phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Der zweite Term gibt in 1. Näherung an, wie groß die Abweichung von der Minkowskimetrik ist.

Für eine kugelförmig, homogene Masse M haben wir: $\Phi = \frac{-GM}{r}$, und dies liefert:

$$g_{00} = c^2 - \frac{2GM}{r} = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right). \text{ Verschwindet die zeitliche Komponente der Metrik in der}$$

Raumzeit, dann erhalten wir den Schwarzschildradius zurück: $1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{2GM}{c^2 r}$ und damit:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}$$

den wir auch schon klassisch in Kapitel 3.1 berechnet haben. Darüber hinaus erhalten wir ebenfalls die gravitative Zeitdilatation aus der Metrik, die wir ebenfalls relativistisch in Kapitel 3.1 angegeben haben:

$$c^2 dt^2 = g_{00} = c^2 \left(1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2} \right) \Rightarrow dt^2 = \frac{g_{00}}{c^2} = 1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2} \Rightarrow dt = \sqrt{\frac{g_{00}}{c^2}} = \sqrt{1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}}$$

$$dt = \sqrt{1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2}}.$$

4.3 Die Krümmung für schwache Felder

Wir hatten die Formel $\Gamma_{ab}^s = \frac{1}{2} g^{sr} \left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{br}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r} \right)$ für die Berechnung der Christoffelsymbole.

$$\text{Mit } (g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\Phi}{c^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und damit } (g^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Weil der metrische Tensor außer für g_{00} konstant ist, verschwinden alle Ableitungen außer für $a=b=0$. Damit ergibt sich:

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{0r} \left(\frac{\partial g_{0r}}{\partial q^0} + \frac{\partial g_{0r}}{\partial q^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial q^r} \right)$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \left(\frac{\partial g_{00}}{\partial q^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial q^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial q^0} \right)$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{2} g^{00} \frac{\partial g_{00}}{\partial q^0} \text{ mit } g_{00} = 1 + \frac{2\Phi}{c^2} \text{ und } g^{00} = \frac{1}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \cdot \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial q^0} = \frac{1}{c^2 + 2\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q^0}$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{c^2 + 2\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial q^0} \text{ oder da } q^0 = t \text{ in der Minkowskimetrik:}$$

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{1}{c^2 + 2\Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{1r} \left(\frac{\partial g_{0r}}{\partial q^0} + \frac{\partial g_{0r}}{\partial q^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial q^r} \right)$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{01}}{\partial q^0} + \frac{\partial g_{01}}{\partial q^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial q^1} \right)$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{00}}{\partial q^1} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial q^1} . \text{ Analog für } s = 2, 3. \text{ Da } q^i = x^i \text{ ist in der Minkowskimetrik:}$$

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^1} . \text{ Analog ergeben sich die Christoffelsymbole für } s = 2, 3. \text{ Damit hat man:}$$

$$\Gamma_{00}^s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^s} \text{ für } s=1,2,3 \text{ und sonst } 0 .$$

Um den Ricci-Tensor zu berechnen, gehen wir vom Riemannschen Krümmungstensor aus:

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial q^k} + \Gamma_{ik}^h \cdot \Gamma_{hj}^l - \Gamma_{ij}^h \cdot \Gamma_{hk}^l .$$

Wir müssen also nur Christoffelsymbole berücksichtigen, für die $l=1, 2, 3$ ist und $j=k=0$.

$$R^l_{0j0} = \frac{\partial \Gamma_{00}^l}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma_{0j}^l}{\partial q^0} + \Gamma_{00}^h \cdot \Gamma_{hj}^l - \Gamma_{0j}^h \cdot \Gamma_{h0}^l .$$

Durch Tensorverjüngung $l=j$ erhalten wir den Ricci-Tensor

$$R_{00} = R^j_{0j0} = \frac{\partial \Gamma_{00}^j}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma_{0j}^j}{\partial q^0} + \Gamma_{00}^h \cdot \Gamma_{hj}^j - \Gamma_{0j}^h \cdot \Gamma_{h0}^j$$

Nun können wir für Γ_{00}^j für $j = 1, 2, 3$ den Term von oben einsetzen:

$$R_{00} = \frac{\partial}{\partial q^j} \frac{1}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{0j}^j}{\partial q^0} + \Gamma_{00}^h \cdot \Gamma_{hj}^j - \Gamma_{0j}^h \cdot \Gamma_{h0}^j$$

Der Term $\frac{\partial \Gamma_{0j}^j}{\partial q^0}$ verschwindet komplett, weil die Ableitungen nach der Zeit $q^0 = t$ verschwinden.

$R_{00} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^j} + \Gamma_{00}^h \cdot \Gamma_{hj}^j - \Gamma_{0j}^h \cdot \Gamma_{h0}^j$. Der erste Term in der verbleibenden Gleichung ist die Divergenz des Gradientenfeldes des Potentials Φ .

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta \Phi + \Gamma_{00}^h \cdot \Gamma_{hj}^j - \Gamma_{0j}^h \cdot \Gamma_{h0}^j$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

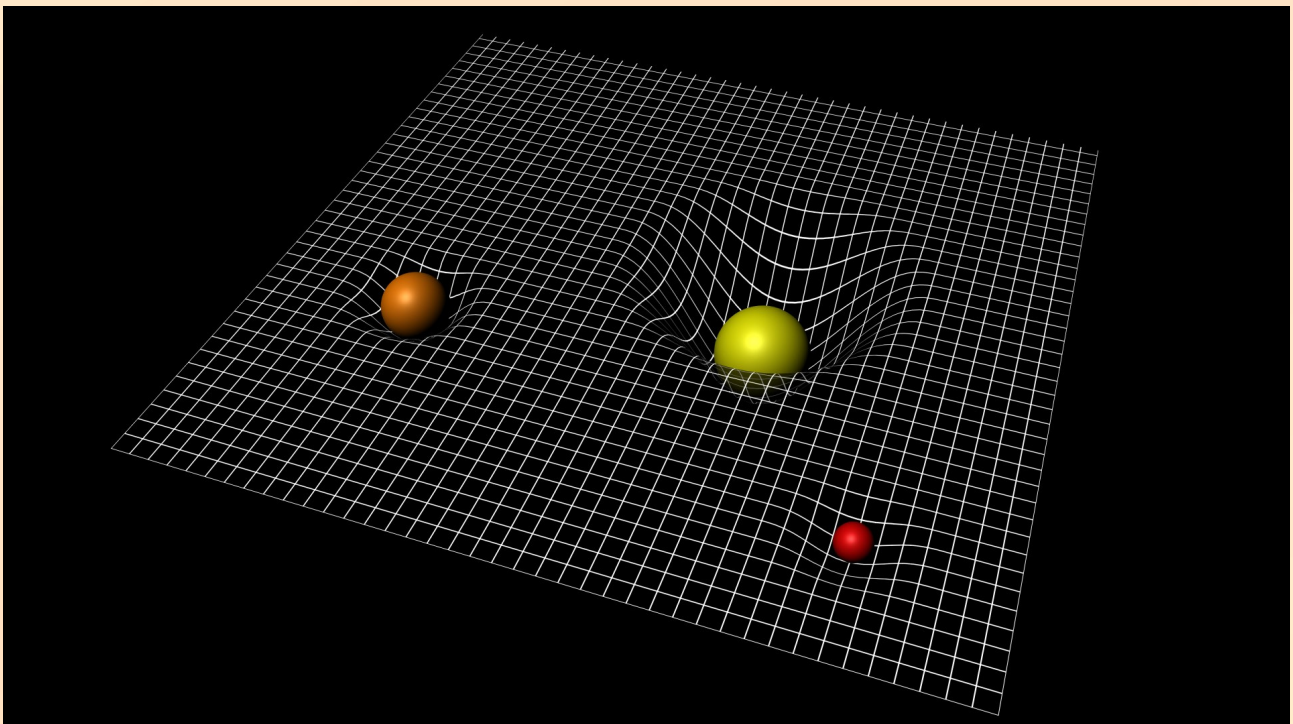
Der Term Γ_{00}^h ist nur für $h = 1, 2, 3$ von 0 verschieden. Dann verschwinden allerdings alle Terme Γ_{hj}^j . Also bleibt nur $R_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta \Phi - \Gamma_{0j}^h \cdot \Gamma_{h0}^j$ übrig.

Der Term Γ_{0j}^h ist nur für $j=0$ und $h=1, 2, 3$ von 0 verschieden. Für $j = 0$ verschwinden aber alle Γ_{h0}^j . Also bleibt nur:

$$R_{00} = \frac{1}{c^2} \Delta \Phi .$$

Dies liefert mit $\Delta \Phi(r) = 4 \pi G \rho(r)$

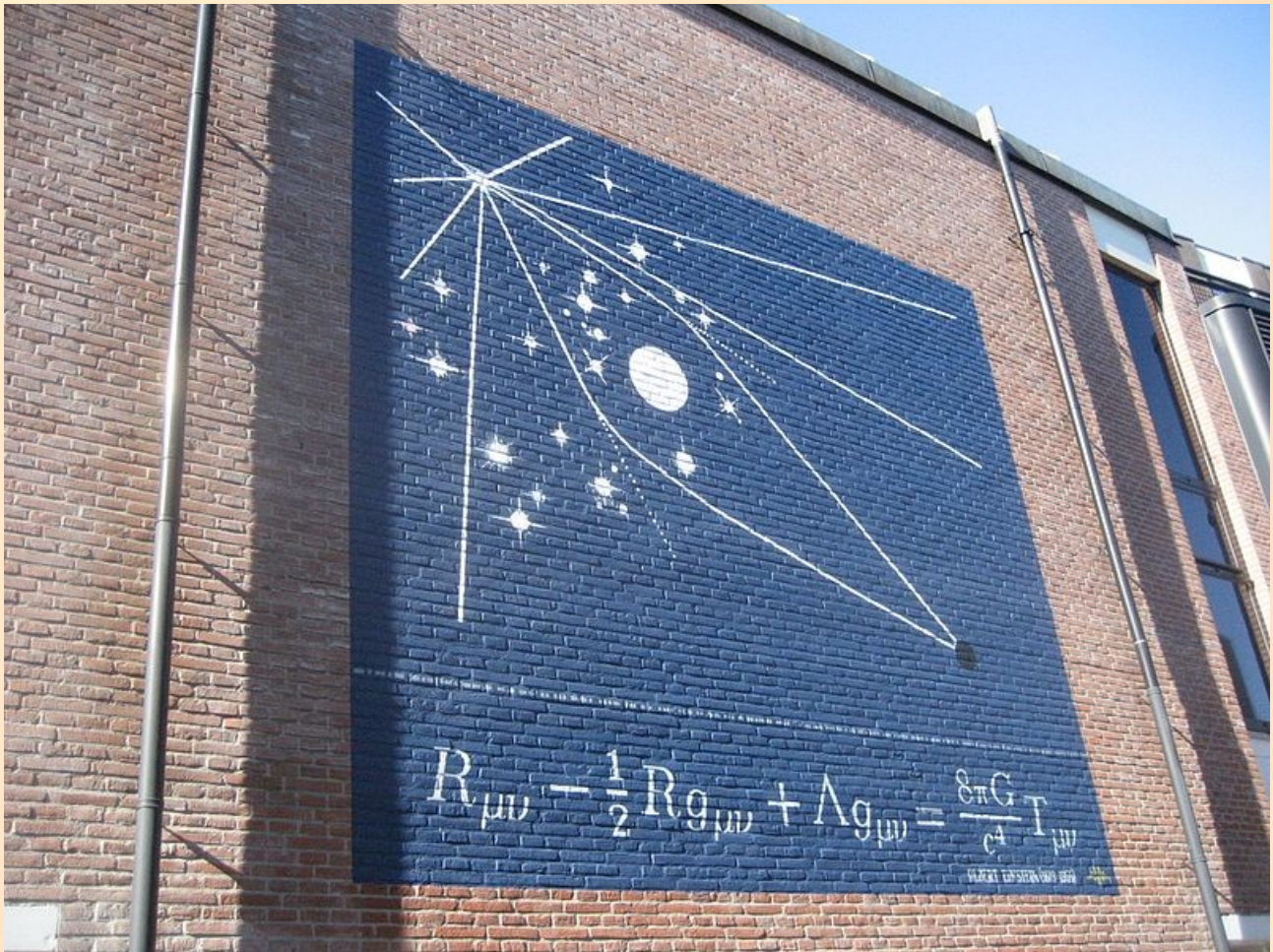
$$R_{00} = \frac{4 \pi G}{c^2} \rho(r) .$$



Raumzeit Krümmung oder „Matter tells space how to curve“,

Bild: https://www.esa.int/var/esa/storage/images/esa_multimedia/images/2015/09/spacetime_curvature/15576375-1-eng-GB/Spacetime_curvature.jpg

4.4 Die Herleitung der Feldgleichung



Quelle: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EinsteinLeiden4.jpg>

Für die Herleitung der Feldgleichung benutzt man einen Satz von Hermann Weyl³¹, der folgende Aussage hat: Einen symmetrischen Tensor 2. Stufe T_{ij} kann man unter bestimmten zusätzlichen Bedingungen, wie die **Linearität** der 2. Ableitung, und im Tensor dürfen **keine höheren** als 2. Ableitungen vorkommen, wie folgt darstellen:

$$R_{ij} + a \cdot g_{ij} R + b \cdot g_{ij} = \kappa \cdot T_{ij} \quad , \text{ wobei } a, b, \kappa \text{ freie Parameter sind.}$$

Die Bewegungsgleichungen erfüllen diese Bedingungen, und man kann deshalb diesen Ansatz benutzen, um die Feldgleichungen herzuleiten.

Darüber hinaus muss der Tensor $R_{ij} + a \cdot g_{ij} R + b \cdot g_{ij}$, wie der Energie-Impuls Tensor T_{ij} ³², **divergenzfrei** sein, und soll im **Minkowskiraum** verschwinden.

31 Siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Hermann_Weyl

32 Siehe Anhang A.5

Wir hatten schon gezeigt, dass $R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} R$ ³³ divergenzfrei ist. Da der Metriktenor g_{ij} ebenfalls divergenzfrei ist³⁴, erfüllt der Tensor $R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} R + b \cdot g_{ij}$ die Bedingung. Somit haben wir a schon bestimmt. Wir erhalten also die Gleichung:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} R + b \cdot g_{ij} = \kappa \cdot T_{ij} .$$

Wir hatten schon gesehen, dass man einen kovarianten Tensor 2. Stufe A_{ij} durch Multiplikation mit dem Metriktenor g^{ij} auf einen gemischten Tensor 2. Stufe transformieren kann:

$A_{ik} g^{kj} = A_i^j$, und danach mit Tensorverjüngung $i=j$ die Spur A_i^i der Matrix A_i^j erhält. Damit erhalten wir aus $A_{ik} g^{kj} = A_i^j$ für $i = j$: $A_{ik} g^{ki} = A_i^i$. Wir haben den Skalar dann entsprechend A genannt. Dies können wir nun auf die Gleichung von oben anwenden. Wir multiplizieren mit g^{ij} und erhalten:

$$R_{ij} g^{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} g^{ij} R + b \cdot g_{ij} g^{ij} = \kappa \cdot T_{ij} g^{ij} , \text{ oder}$$

$$R - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} g^{ij} R + b \cdot g_{ij} g^{ij} = \kappa \cdot T .$$

Betrachtet man $A_{ik} g^{kj} = A_i^j$ und setzt $A_{ik} g_{ik}$, dann erhält man:

$g_{ik} g^{kj} = g_i^j$. Auf der linken Seite steht die Matrizenmultiplikation von g_{ij} mit g^{ij} . Aber diese beiden Matrizen sind invers zueinander. Deshalb ist $A_i^j = \delta_i^j$ die Einheitsmatrix. Die Spur der Einheitsmatrix hat den Wert 4, weil wir unsere Überlegungen in der vierdimensionalen Raumzeit durchführen. Das liefert:

$$R - \frac{1}{2} \cdot 4 R + 4 b = \kappa \cdot T , \text{ oder } -R + 4 b = \kappa \cdot T \text{ oder } R = 4 b - \kappa \cdot T .$$

Damit können wir den gefundenen Wert für R in die Gleichung $R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} R + b \cdot g_{ij} = \kappa \cdot T_{ij}$ einsetzen.

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} (4 b - \kappa \cdot T) + b \cdot g_{ij} = \kappa \cdot T_{ij} \text{ oder}$$

33 Siehe Seite 76

34 Siehe Seite 71

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$R_{ij} - b \cdot g_{ij} = \kappa \cdot T_{ij} - \frac{1}{2} \kappa T g_{ij} .$$

Die linke Seite soll im Minkowskiraum verschwinden. Da Der Ricci-Tensor im Minkowskiraum verschwindet und g_{ij} im Minkowskiraum die Signatur $\{-1, 1, 1, 1\}$ bzw. $\{1, -1, -1, -1\}$ hat, kann die linke Seite nur für $b=0$ verschwinden. Wir erhalten damit:

$$R_{ij} = \kappa \cdot T_{ij} - \frac{1}{2} \kappa T g_{ij} .$$

Um die Konstante näher zu bestimmen, gehen wir vom Newtonschen Grenzfall aus, der im Euklidischen Koordinatensystem gilt.

$$R_{00} = \kappa \cdot T_{00} - \frac{1}{2} \kappa T g_{00}$$

Darin ist gemäß letztem Kapitel: $R_{00} = \frac{4\pi G}{c^2} \rho(r)$.

Der Energie-Impuls Tensor hat dann nach der Speziellen Relativitätstheorie nur die Komponente $T_{00} = \rho(r) \cdot c^2$. Also ist T ebenfalls gleich $\rho(r) \cdot c^2$. Die Metrik im Euklidischen Koordinatensystem ist die Einheitsmatrix. Also ist hier $g_{00} = 1$. Somit erhalten wir:

$$\frac{4\pi G}{c^2} \rho(r) = \kappa \rho(r) \cdot c^2 - \frac{1}{2} \kappa \rho(r) \cdot c^2 = \frac{1}{2} \kappa \rho(r) c^2 , \text{ und damit für die Konstante } \kappa = \frac{8\pi G}{c^4} .$$

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

bzw.

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} R = - \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij}$$

bzw.

$$R_{ij} = - \frac{8\pi G}{c^4} \left(T_{ij} - \frac{T}{2} g_{ij} \right)$$

Dies sind die Feldgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Die Feldgleichung kann um die kosmologische Konstante Λ erweitert werden. Dies liefert dann die erweiterte Feldgleichung:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} \text{ bzw. } R_{ij} - \frac{1}{2} \cdot g_{ij} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ij} - \Lambda g_{ij} .$$

Kapitel V: Lösungen der Feldgleichungen

5.1 Die linke Seite der Feldgleichung

Die folgende Tabelle soll schrittweise aufzeichnen, wie man durch Koordinatentransformation den Einsteintensor ausrechnen kann.

| Schritt | Bedeutung |
|---|---|
| $\begin{matrix} (x^1(q^1, \dots, q^4)) & (q^1(x^1, \dots, x^4)) \\ \dots & \dots \\ (x^n(q^1, \dots, q^4)) & (q^n(x^1, \dots, x^4)) \end{matrix}$ | Koordinatentransformation |
| $g_{kl} = \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial q^k} \frac{\partial x^i}{\partial q^l}$ | Komponenten des kovarianten Metriktensors |
| $(g^{kl}) = (g_{ij})^{-1}$ | Kontravarianter Metriktensor als Matrix |
| $ds^2 = g_{ij} \cdot dq^i \cdot dq^j$ | Wegelement |
| $\Gamma_{ab}^s = \frac{1}{2} g^{sr} \left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{br}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r} \right)$ | Christoffelsymbole |
| $R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial q^k} + \Gamma^h_{ik} \cdot \Gamma^l_{hj} - \Gamma^h_{ij} \cdot \Gamma^l_{hk}$ | Riemannscher Krümmungstensor |
| $R_{ij} = R^s_{isj}$ | Ricci-Tensor durch Tensorverjüngung |
| $R = g^{ij} R_{ij}$ $R^j_i = g^{kj} R_{ki} \Rightarrow R = R^i_i$ | Ricci-Skalar |
| $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$ | Einsteintensor |

Will man damit die Feldgleichungen lösen, so muss man einen metrischen Tensor derart bestimmen, dass der Einstein-Tensor gleich dem Energie-Impuls-Tensor ist. Die Metrik beschreibt dann die Raumzeitkrümmung unter einer bestimmten Bedingung, die durch den Energie-Impuls-Tensor gegeben ist. Die Metrik wird in den Lösungen über das Linienelement ds^2 angegeben.

Das Gravitationsfeld einer homogenen, nicht geladenen und nicht rotierenden kugelförmigen Masse wird durch die Schwarzschildmetrik beschrieben. Es handelt sich bei dieser Metrik um die Lösung der einsteinschen Feldgleichungen. Die äußere Schwarzschildlösung ist die Vakuumlösung der Feldgleichungen für den Außenraum einer kugelsymmetrischen homogenen Masseverteilung. Die innere Schwarzschildlösung beschreibt die Metrik einer homogenen Flüssigkeitskugel. An der Kugeloberfläche stimmt die Metrik der inneren und äußeren Lösung überein und ist differenzierbar.

Das Linienelement der **äußeren** Schwarzschildlösung sei vorweggenommen und ist durch

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2$$

gegeben. Setzt man $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2$, so erhält man die einfachere Formel:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad 35$$

Das Linienelement der **inneren** Schwarzschildlösung sei vorweggenommen und ist durch

$$ds^2 = -\left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_g}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s r^2}{r_g^3}}\right)^2 c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s r^2}{r_g^3}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad 36$$

gegeben. Dabei ist r_g der Radius der Massenkugel mit homogener Massenverteilung und $r < r_g$. $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ ist der Schwarzschildradius oder der Radius des Ereignishorizontes.

Im Folgenden soll es darum gehen, diese metrischen Tensoren aus den Bedingungen des Energie-Impulstensors herzuleiten. Wir erhalten dann eine Lösung der einsteinschen Feldgleichungen für

35 Siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild-Metrik>

36 Siehe: Ebenda

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

eine Kugel mit homogener Massenverteilung. Insbesondere wird diese Metrik bei **Schwarzen Löchern** verwendet, die ungeladen sind und nicht rotieren.

Wenn man die Metrik anschaut, dann ergibt sie sich aus einer Koordinatentransformation des Minkowskiraums in Kugelkoordinaten. Allerdings haben die zeitliche t Koordinate und räumliche r Koordinate Vorfaktoren, die selbst wiederum Funktionen der räumlichen r -Koordinate sind.

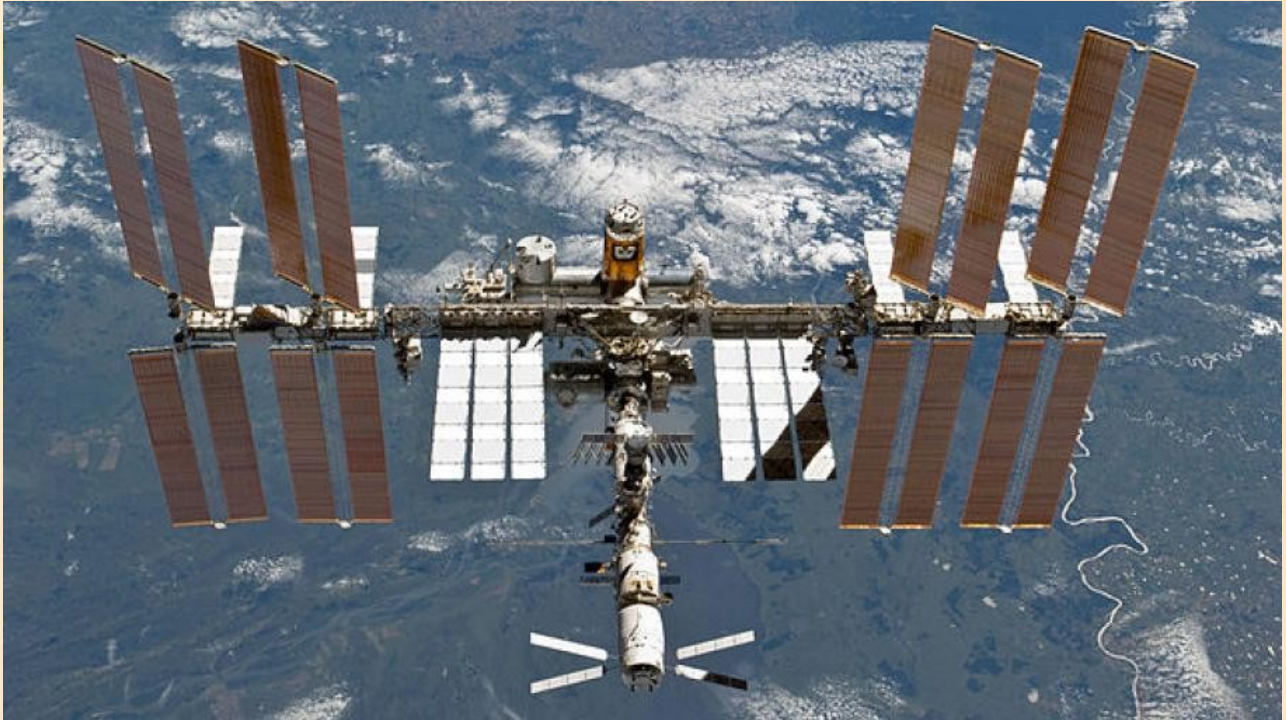


Bild: NASA, gemeinfrei

5.2 Die äußere Schwarzschild Lösung

Die flache Raumzeit ist durch $ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$ in Kugelkoordinaten gegeben. Dafür hat man – wie oben schon erwähnt $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ – gesetzt. Man macht folgenden **Ansatz** für die allgemeine kugelsymmetrische Raumzeit:

$$ds^2 = -c^2 \cdot e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Wobei $\Phi(r, t); \Lambda(r, t)$ reellwertige Funktionen sind. Für weiteren Berechnung setzt man $c = 1$. Die metrischen Tensoren sind dann in Matrixschreibweise:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{e^{2\Phi}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^{2\Lambda}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Die Christoffelsymbole bestimmt man über:

$$\Gamma_{ab}^s = \frac{1}{2} g^{sr} \left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{br}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r} \right)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = \begin{pmatrix} \Phi_{|t} & \Phi_{|r} & \Lambda & 0 \\ \Phi_{|r} & \Lambda_{|t} e^{2(\Lambda-\Phi)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Gamma_{ij}^1 = \begin{pmatrix} \Phi_{|r} e^{2(\Phi-\Lambda)} & \Lambda_{|t} & 0 & 0 \\ \Lambda_{|t} & \Lambda_{|r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r e^{-2\Lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \sin^2 \theta e^{-2\Lambda} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{ij}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \end{pmatrix} \quad \Gamma_{ij}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cot \theta \\ 0 & \frac{1}{r} & \cot \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Der Riemannsche Krümmungstensor wird über

$$R^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ij}}{\partial q^k} + \Gamma^h_{ik} \cdot \Gamma^l_{hj} - \Gamma^h_{ij} \cdot \Gamma^l_{hk}$$

berechnet. Man erhält folgende Ergebnisse mit dem Indexshift:

$$R^{01}_{01} = e^{-2\Lambda} (\Lambda_{|r} \cdot \Phi_{|r} - \Phi_{|r}^2 - \Phi_{|rr}) - e^{2\Phi} \cdot (\Phi_{|t} \cdot \Lambda_{|t} - \Lambda_{|t}^2 - \Lambda_{|tt})$$

$$R^{02}_{02} = R^{03}_{03} = -\frac{\Phi_{|r} e^{-2\Lambda}}{r}$$

$$R^{02}_{12} = R^{03}_{13} = -\frac{\Lambda_{|t} e^{-2\Phi}}{r}$$

$$R^{12}_{12} = R^{13}_{13} = \frac{\Lambda_{|r} e^{-2\Lambda}}{r}$$

$$R^{12}_{02} = R^{13}_{03} = \frac{\Lambda_{|t} e^{-2\Lambda}}{r}$$

$$R^{23}_{23} = R^{23}_{23} = \frac{1 - e^{-2\Lambda}}{r^2}$$

Die anderen Ergebnisse erhält man aus den Symmetrien:

$$S1: R_{lijk} = R_{jkli}$$

$$S2: R_{lijk} = -R_{iljk}$$

$$S3: R_{lijk} = -R_{likj}$$

$$S4: R_{lijk} + R_{ljki} + R_{lkij} = 0$$

Der Ricci-Tensor wird durch Tensorverjüngung berechnet:

$$R_{ij} = R^s_{isj}$$

Man erhält folgende Ergebnisse in Matrixschreibweise:

$$\begin{aligned} R^0_0 &= A - \frac{2\Phi_{|r} e^{-2\Lambda}}{r} & R^1_1 &= A + \frac{2\Lambda_{|r} e^{-2\Lambda}}{r} & R^2_2 &= R^3_3 = \frac{(\Lambda_{|r} - \Phi_{|r}) e^{-2\Lambda}}{r} + \frac{(1 - e^{-2\Lambda})}{r^2} \\ R^0_1 &= -2\Lambda_{|t} \frac{e^{-2\Phi}}{r} & R^1_0 &= 2\Lambda_{|t} \frac{e^{-2\Lambda}}{r} \end{aligned} \quad 37$$

Die Spur der Ricci-Matrix $R^i_i = R$ ist der Ricci-Skalar:

$$R = 2 \left[A - 2 \frac{(e^{-2\Lambda})}{r} \cdot (\Lambda_{|r} - \Phi_{|r}) + \frac{(1 - e^{-2\Lambda})}{r} \right] .$$

Der Ricci-Tensor und der Ricci-Skalar bilden den Einstein Tensor, der als Matrix für die allgemeine kugelsymmetrische Raumzeit folgende Gestalt hat:

$$G^i_j = \begin{pmatrix} -\frac{2\Lambda_{|r} e^{-2\Lambda}}{r} - \frac{(1 - e^{-2\Lambda})}{r^2} & -\frac{2\Lambda_{|t} e^{-2\Phi}}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{2\Lambda_{|t} e^{-2\Phi}}{r} & \frac{2\Phi_{|r} e^{-2\Lambda}}{r} - \frac{(1 - e^{-2\Lambda})}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A + (\Phi_{|r} - \Lambda_{|r}) \frac{e^{-2\Lambda}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A + (\Phi_{|r} - \Lambda_{|r}) \frac{e^{-2\Lambda}}{r} \end{pmatrix}$$

Ist im Außenraum um die Kugel mit homogener Massenverteilung keine Materie, dann ist dort $T=0$ und somit $G=0$. Alle Komponenten des Einstein Tensor sind 0.³⁸

Bemerkung: Oft wird durch Indexshift eine andere Form der Feldgleichung gewählt. Dann muss man darauf achten, dass man beide Seiten mit dem entsprechenden Metriktensor multipliziert. Dies wurde hier bei dem Ricci-Tensor und dem Ricci-Skalar getan. Der Energie-Impuls-Tensor ist 0 und vom Indexshift nicht betroffen.

$$\text{Aus } -\frac{2\Lambda_{|t} e^{-2\Phi}}{r} = 0 \text{ folgt } \Lambda_{|t} = 0 \text{ und damit } \Lambda = \Lambda(r) .$$

Aus $G^0_0 - G^1_1 = 0$ folgt $\Phi_{|r} + \Lambda_{|r} = 0$ und durch Integration: $\Phi = -\Lambda(r) + f(t)$ mit einer beliebig zeitabhängigen Funktion oder $\Phi = -\Lambda(r)$, weil man die zeitliche Funktion mit in die Koordinatentransformation der Zeit integrieren kann.

37 Siehe: <http://www.wuser.gwdg.de/~fmuelle/Vorl/art08/Innere-Schwarzschild-Loesung.pdf>

38 Siehe: <http://www.physik.uni-regensburg.de/forschung/keller/ART/art5.pdf>

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Damit hängen die beiden Funktionen Φ, Λ nur von r ab und G^0_0 liefert folgende Gleichung:

$$-\frac{2\Lambda_r e^{-2\Lambda}}{r} - \frac{(1-e^{-2\Lambda})}{r^2} = 0.$$

Daraus folgt: $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r \cdot (1-e^{-2\Lambda})] = 0$. Also: $r \cdot (1-e^{-2\Lambda}) = \text{konstant}$. Dies liefert das Ergebnis:

$$e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{k}{r} = e^{2\Phi} \quad \text{mit einer reellen Konstanten } k.$$

Setzt man das Ergebnis in den Ansatz

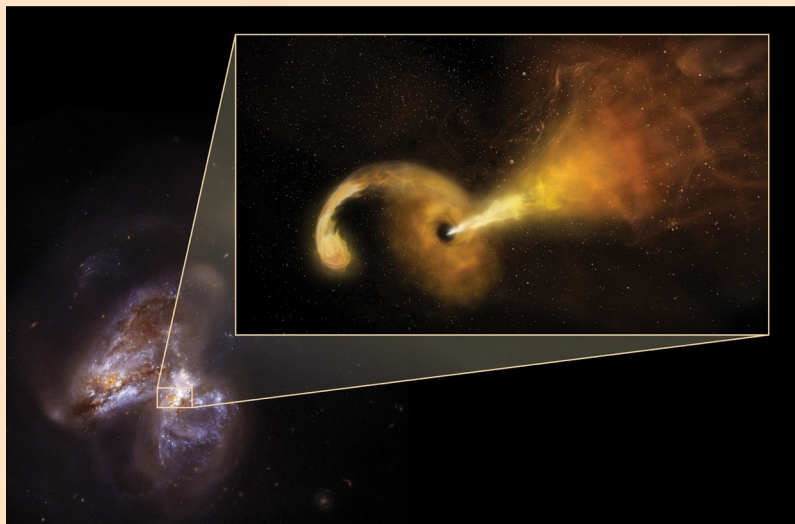
$$ds^2 = -c^2 \cdot e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad \text{oder} \quad ds^2 = -c^2 \cdot \frac{1}{e^{-2\Phi}} dt^2 + \frac{1}{e^{-2\Lambda}} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

ein, so erhält man die äußere Schwarzschildlösung zu:

$$ds^2 = -c^2 \cdot \left(1 - \frac{k}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{k}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

Für $k = r_s$ erhält man das Ergebnis von oben: $ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2$.

Das Ergebnis hat eine Singularität bei $r = r_s$. Dies war zu erwarten, weil es sich hier um den Ereignishorizont einer kugelförmigen homogenen Masse handelt.



A Tidal Disruption Event in Arp299B, Bild:

https://www.jpl.nasa.gov/spaceimages/images/largesize/PIA22356_hires.jpg

5.3 Die innere Schwarzschildlösung

Gelöst werden muss die einsteinsche Feldgleichung: $G_{ij} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} \cdot T_{ij}$. Die rechte Seite der Gleichung ist jetzt nicht gleich 0, sondern durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$T^{ij} = \frac{1}{c^2} \mu u^i u^j + p \left(\frac{1}{c^2} u^i u^j + g^{ij} \right).$$

Die Formel bezieht sich auf die Minkowskimetrik mit der Signatur $\{-1, 1, 1, 1\}$. Wählt man die Signatur $\{1, -1, -1, -1\}$ so erhält man: $T^{ij} = \frac{1}{c^2} \mu u^i u^j + p \left(\frac{1}{c^2} u^i u^j - g^{ij} \right)$.

Den Ausdruck $\mu \approx \rho c^2$ bezeichnet man als Ruhedichte, und p ist der Druck. Mit c wird wiederum die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum bezeichnet. Man setzt voraus, dass μ und p Funktionen sind, die nur von r abhängen. Die Metrik ist dann durch $ds^2 = -c^2 \cdot e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2$ in Kugelkoordinaten gegeben. Für den kontravarianten

metrischen Tensor hatten wir schon zu $g^{ij} = \begin{pmatrix} -e^{-2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}$ berechnet.

Dabei waren die Funktionen Φ, Λ ebenfalls reellwertige Funktionen, die nur vom Radius abhängen. Den Vektor u kann man dann durch folgende Komponenten angeben:

$$u = \begin{pmatrix} c \cdot e^{-\Phi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten: $T^{00} = \mu e^{-2\Phi} + p(e^{-2\Phi} - e^{-2\Phi}) = \mu \cdot e^{-2\Phi}$.

Alle anderen Produkte aus den Koordinaten von $u = \begin{pmatrix} c \cdot e^{-\Phi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind 0, sodass nur die Diagonale

$T^{ii} = p \cdot g^{ii}$ für $i=1, \dots, 3$ übrigbleibt. Dies liefert als Energie-Impuls-Tensor:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \mu \cdot e^{-2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p e^{-2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{p}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} .$$

Durch Indexshift von T^{in} mit dem metrischen Tensor g_{jn} erhalten wir für den Energie-Impuls Tensor:

$$T_j^i = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} .$$

Den Einsteintensor in Kugelkoordinaten ist durch

$$G_j^i = \begin{pmatrix} -\frac{2\Lambda_{|r} e^{-2\Lambda}}{r} - \frac{(1-e^{-2\Lambda})}{r^2} & -\frac{2\Lambda_{|t} e^{-2\Phi}}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{2\Lambda_{|t} e^{-2\Phi}}{r} & \frac{2\Phi_{|r} e^{-2\Lambda}}{r} - \frac{(1-e^{-2\Lambda})}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A + (\Phi_{|r} - \Lambda_{|r}) \frac{e^{-2\Lambda}}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A + (\Phi_{|r} - \Lambda_{|r}) \frac{e^{-2\Lambda}}{r} \end{pmatrix}$$

Wie bei der äußeren Schwarzschildlösung gilt: $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r \cdot (1 - e^{-2\Lambda})] = k\mu$ oder

$$\frac{d}{dr} [r \cdot (1 - e^{-2\Lambda})] = k\mu r^2 .$$

Mit Integration liefert das $r \cdot (1 - e^{-2\Lambda}) = \frac{1}{3} k\mu r^3$ bzw. $1 - e^{-2\Lambda} = \frac{1}{3} k\mu r^2$, sodass nun $e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{1}{3} k\mu r^2$ gilt.

Die Konstante k ist hier die Konstante aus der einsteinschen Feldgleichung: $G_{ij} = \frac{8 \cdot \pi}{c^4} G \cdot T_{ij}$ –

also $k = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4}$.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Damit erhält man: $e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} \rho \cdot c^2 r^2 = 1 - 2 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho \cdot \frac{G}{r c^2}$ bzw. das vorläufige Ergebnis wegen der homogenen Masseverteilung ist $\rho(r) = \text{konstant}$:

$$e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2MG}{r c^2} = 1 - \frac{R_s}{r} \quad \text{mit} \quad R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2} \quad \text{und} \quad r > R_s .$$

Da der Ansatz für die Metrik $ds^2 = -c^2 \cdot e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 d\Omega^2$ ist, erhalten wir das Zwischenergebnis:

$$e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}} .$$

Zur Bestimmung von $e^{2\Phi}$ betrachten wir die Komponente G^1_1 im Einsteintensor:

$$G^1_1 = \frac{2\Phi_{|r} e^{-2\Lambda}}{r} - \frac{(1 - e^{-2\Lambda})}{r^2} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} p \quad \text{oder} \quad r^{-2} \cdot (r \cdot 2\Phi_{|r} e^{-2\Lambda} - (1 - e^{-2\Lambda})) = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} p .$$

Einsetzen der Lösung für $e^{-2\Lambda}$ liefert: $r^{-2} \cdot (r \cdot 2\Phi_{|r} (1 - \frac{2MG}{r c^2}) - (1 - (1 - \frac{2MG}{r c^2}))) = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} p .$

Zusammenfassung ergibt: $r^{-2} \cdot (r \cdot 2\Phi_{|r} (1 - \frac{2MG}{r c^2}) - \frac{2MG}{r c^2}) = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} p .$

Die Gleichung muss nun nach $\Phi_{|r}$ aufgelöst werden:

$$(\Phi_{|r}) = \frac{\frac{4 \cdot \pi \cdot G}{c^4} \cdot r p + \frac{MG}{r^2 c^2}}{(1 - \frac{2MG}{r c^2})} = \frac{\frac{4 \cdot \pi \cdot G}{c^2} \cdot r^3 p + MG}{c^2 \cdot r (r - \frac{2MG}{c^2})} = \frac{G \cdot (\frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot r^3 p + M)}{c^2 \cdot r (r - \frac{2MG}{c^2})} .$$

Damit erhalten wir die Formel für die 1. Ableitung der Funktion Φ :

$$\Phi_{|r} = \frac{G}{c^2} \cdot \frac{\frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot r^3 p + M}{r (r - \frac{2MG}{c^2})}$$

die in der kugelsymmetrischen Metrik vorkommt.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Leider können wir die Lösung von Φ durch Integration aus der Lösung nicht ermitteln, weil der Druck p in der Formel ebenfalls von r abhängt. Bei der Masse wurde von einer homogenen Masseverteilung ausgegangen, und deshalb schreiben wir für die Masse keine Abhängigkeit von der Massendichte ρ , weil es sich hier um eine konstante Größe handelt.

Um eine Gleichung für den Druck zu erhalten, wertet man die Komponenten G^2_2, G^3_3 unter Ausnutzung der beiden Ergebnisse, die wir für die Koordinatenfunktionen Φ, Λ der Schwarzschildmetrik schon kennen, aus. Dies liefert dann:

$$p_{|r} = -\Phi_{|r} \cdot (p + \mu)$$

Setzt man das oben ermittelte Ergebnis für $\Phi_{|r}$ in diese Gleichung ein, so liefert das die sogenannte **Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichung**³⁹:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G}{c^2} \cdot (\mu + p) \cdot \frac{\frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot r^3 p + M}{r \left(r - \frac{2MG}{c^2} \right)}$$

Die Energiedichte μ ist gemäß der Gleichung $E=mc^2$ der Speziellen Relativitätstheorie dann:

$$\mu = \rho \cdot c^2.$$

1. Dieser Wert ist gemäß Newtonscher Näherung wesentlich kleiner als der Druck p : $p \ll \mu$. Darüber hinaus ist $\frac{GM}{c^2} \ll r$. Damit vereinfacht sich die TOV-Gleichung zu:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G}{c^2} \cdot \rho c^2 \cdot \frac{\frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot r^3 p + M}{r \left(r - \frac{2MG}{c^2} \right)} = -\frac{G \cdot \rho \cdot M}{r^2}$$

Es handelt sich bei dieser Gleichung um die Gleichgewichtsbedingung der Newtonschen Hydrostatik. Wir gehen wieder davon aus, dass die Masse in der Kugel homogen verteilt ist:

$$M = \rho \frac{4}{3} \cdot \pi r^3, \text{ und damit: } \frac{dp}{dr} = -\frac{4}{3} G \pi \rho^2 r.$$

Die Stammfunktion ist also:

$$p(r) = -\frac{2}{3} G \pi \rho^2 r^2.$$

39 Siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Grenze>

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Da an der Oberfläche der Masse der Druck verschwinden soll, erhält man somit:

$$p(r) = -\frac{2}{3} G \pi \rho^2 (R^2 - r^2)$$

2. Wir wollen eine Lösung für konstante Energiedichte finden, d. h. die Masse hat eine konstante Massendichte: $\mu_0 = \rho_0 \cdot c^2$. Für die Masse ergibt sich dann: $M = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{\mu_0}{c^2} \cdot r^3$. Damit erhält die TOV-Gleichung folgende Form:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G}{c^2} \cdot (\mu_0 + p) \cdot \frac{\frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot r^3 p + \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{\mu_0}{c^2} \cdot r^3}{2 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{\mu_0}{c^2} \cdot r^3 G} \cdot \frac{1}{r \left(r - \frac{2 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{\mu_0}{c^2} \cdot r^3 G}{c^2} \right)}$$

Setzt man $k = \frac{G}{c^2}$, so liefert das:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{k}{2} \cdot (\mu_0 + p) \cdot \frac{\frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot r \left(p + \frac{1}{3} \mu_0 \right)}{\left(1 - \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{\mu_0}{c^2} \cdot r^2 k \right)} = -\frac{k}{2} \cdot (\mu_0 + p) \cdot \frac{\frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot \left(p + \frac{1}{3} \mu_0 \right)}{\left(\frac{1}{r} - \frac{4 \pi}{c^2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot r k}{3} \right)}$$

Setzt man $\tilde{k} = \frac{4 \cdot \pi}{c^2} \cdot k$, so erhält man die endgültige Formel:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\tilde{k}}{2} \cdot (\mu_0 + p) \cdot \frac{p + \frac{1}{3} \mu_0}{\left(\frac{1}{r} - \mu_0 \cdot r \cdot \frac{\tilde{k}}{3} \right)}$$

Die Trennung der Variablen liefert folgende Gleichung:

$$\frac{dp}{(p + \mu_0) \cdot \left(p + \frac{1}{3} \mu_0 \right)} = -\frac{\tilde{k}}{2} \cdot \frac{dr}{\left(\frac{1}{r} - \mu_0 \cdot r \cdot \frac{\tilde{k}}{3} \right)}$$

Über die Partialbruchzerlegung $\frac{1}{(p + \mu_0) \cdot \left(p + \frac{1}{3} \mu_0 \right)} = \frac{3}{2 \mu_0} \cdot \left(\frac{1}{p + \frac{1}{3} \mu_0} - \frac{1}{p + \mu_0} \right)$

gelangt man zum Integral auf der linken Seite:

$$\frac{3}{2\mu_0} \cdot (\ln(p + \frac{1}{3}\mu_0) - \ln(p + \mu_0)) = \frac{3}{2\mu_0} \cdot \ln\left(\frac{p + \frac{1}{3}\mu_0}{p + \mu_0}\right) .$$

Die linke Seite der Gleichung $\frac{dp}{(p + \mu_0) \cdot (p + \frac{1}{3}\mu_0)} = -\frac{\tilde{k}}{2} \cdot \frac{dr}{(\frac{1}{r} - \mu_0 \cdot r \frac{\tilde{k}}{3})}$ kann zu

$$-3 \frac{\tilde{k}}{2} \cdot \frac{rdr}{(3 - \mu_0 \cdot r^2 \tilde{k})} = -\frac{3}{2\mu_0} \cdot \frac{rdr}{(\frac{3}{\mu_0 \tilde{k}} - r^2)}$$

umgeformt werden und dies liefert durch Integration den Ausdruck für die linke Seite:

$$-\frac{3}{2\mu_0} \cdot \int \frac{rdr}{(\frac{3}{\mu_0 \tilde{k}} - r^2)} = \frac{-3}{2\mu_0} \cdot \frac{-\ln(r^2 - \frac{3}{2\mu_0 \tilde{k}})}{2} = \frac{3}{4\mu_0} \cdot \ln(r^2 - \frac{3}{2\mu_0 \tilde{k}}) .$$

Damit erhält man:

$$\frac{3}{2\mu_0} \cdot \ln\left(\frac{p + \frac{1}{3}\mu_0}{p + \mu_0}\right) = \frac{3}{4\mu_0} \cdot \ln\left(r^2 - \frac{3}{2\mu_0 \tilde{k}}\right) , \text{ oder } \ln\left(\frac{p + \frac{1}{3}\mu_0}{p + \mu_0}\right) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(r^2 - \frac{3}{2\mu_0 \tilde{k}}\right) + C .$$

Hierbei ist C die Integrationskonstante, die man noch bestimmen muss. Dies liefert dann bis auf die Integrationskonstante die vorläufige Lösung:

$$\frac{p + \frac{1}{3}\mu_0}{p + \mu_0} = C \cdot \sqrt{r^2 - \frac{3}{2\mu_0 \tilde{k}}} ,$$

die man noch nach p auflösen muss und über die Bedingung $p(R_G) = 0$ – der Druck an der Oberfläche der kugelförmigen Masse soll verschwinden – ermittelt man die noch fehlende Integrationskonstante. Das Ergebnis für den Druck ist:

$$p(r) = \mu_0 \cdot \frac{C \sqrt{\frac{3}{\tilde{k}\mu_0} - r^2} - \frac{1}{3}}{1 - C \sqrt{\frac{3}{\tilde{k}\mu_0} - r^2}} .$$

Dies ergibt:

$$p(R_G) = \mu_0 \cdot \frac{C \sqrt{\frac{3}{\tilde{k} \mu_0} - R_G^2} - \frac{1}{3}}{1 - C \sqrt{\frac{3}{\tilde{k} \mu_0} - R_G^2}} = 0$$

und damit für die Integrationskonstante:

$$C = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{\frac{3}{\tilde{k} \mu_0} - R_G^2}} .$$

Für $r=0$ ist die Lösung nicht singulär und man erhält:

$$p(0) = \mu_0 \cdot \frac{C \sqrt{\frac{3}{\tilde{k} \mu_0} - \frac{1}{3}}}{1 - C \sqrt{\frac{3}{\tilde{k} \mu_0}}} = \mu_0 \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \tilde{k} \mu_0 \frac{R_G^2}{3}}}{3 \sqrt{1 - \tilde{k} \mu_0 \frac{R_G^2}{3}} - 1} .$$

Der Nenner wird positiv, wenn $3 \sqrt{1 - \tilde{k} \mu_0 \frac{R_G^2}{3}} > 1$ ist. Dies liefert als eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Sterns mit konstanter Energiedichte die Abschätzung:

$$R > \frac{9G}{4c^2} \cdot M .$$

Verbindet man die äußere und die innere Schwarzschildmetrik durch die Forderung, dass beide stetig ineinander übergehen, so haben wir den Schwarzschildradius zu $R_s = \frac{2G \cdot M}{c^2}$ bestimmt, was

nach M aufgelöst $M = \frac{R_s c^2}{2G}$ ergibt. Damit liefert dies eine Abschätzung für den Radius eines Sternes mit konstanter Energiedichte zu:

$$R_G > \frac{9}{8} \cdot R_s .$$

Dies ist eine Obergrenze für den Radius stabiler Sterne.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

3. Die Berechnung von $\Phi|_r = \frac{G}{c^2} \cdot \frac{\frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot r^3 \rho + M}{r(r - \frac{2MG}{c^2})}$ mit der oben gefunden Gleichung für

$$\rho(r) = \mu_0 \cdot \frac{C \sqrt{\frac{3}{\tilde{k} \mu_0} - r^2} - \frac{1}{3}}{1 - C \sqrt{\frac{3}{\tilde{k} \mu_0} - r^2}}$$

ist sehr aufwendig. Allerdings kann man über die geforderte

Stetigkeit auch einen einfacheren Zugang zur Lösung der Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = - \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_g}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r_s r^2}{r_g^3}} \right)^2 c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s r^2}{r_g^3}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \text{ gewinnen.}$$

Dazu betrachten wir die Metrik für die äußere Schwarzschildlösung, die wir schon hergeleitet hatten:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

und machen folgenden **Ansatz** für die Funktionen Φ, Λ im Ausdruck

$$ds^2 = - c^2 \cdot \frac{1}{e^{-2\Phi}} dt^2 + \frac{1}{e^{-2\Lambda}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 :$$

$$e^{-2\Lambda(r_g)} : 1 - A r_g^2 = 1 - \frac{r_s}{r_g} \quad e^{-2\Phi(r_g)} : \left(\frac{B}{\rho c^2} \right)^2 = 1 - \frac{r_s}{r_g} .$$

Dabei ist r_s der Schwarzschildradius und r_g der Radius der kugelförmigen Masse mit homogener Massenverteilung.

Die Lösungen für A, B sind: $A = \frac{r_s}{r_g^3}$ und $B = \rho c^2 \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_g}}$. Mit der Konstante $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ aus

den einsteinschen Feldgleichungen und dem Schwarzschildradius $r_s = \frac{2MG}{c^2}$ in Newtonscher

Näherung ergibt sich $\rho c^2 = \frac{3r_s}{\kappa r_g^3}$ und damit ebenso: $B = \frac{3r_s}{\kappa r_g^3} \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_g}}$.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Mit A erhalten wir die Lösung: $e^{-2\Lambda(r)}: 1 - Ar^2 = 1 - \frac{r_s r^2}{r_g^3}$ und damit einen Teil der Schwarzschildmetrik.

Die Gleichung $p_{|r} = -\Phi_{|r} \cdot (p + \mu)$ liefert: $\frac{p_{|r}}{(p + \mu)} = -\Phi_{|r}$ und Integration dann:

$-\Phi = \ln(p + \mu) + K$. Dies ergibt $e^{-\Phi} = e^K(p + \mu)$ oder $e^\Phi = \frac{e^{-K}}{p + \mu}$ mit $\mu = c^2 \cdot \rho$. Dabei gilt gemäß dem Ansatz: $e^{-K} = B$. Wir erhalten somit $e^\Phi = \frac{B}{p + \mu}$. Setzen wir in die Gleichung die Werte für B und für den Druck ein, den wir schon hergeleitet haben, dann liefert eine Rechnung als Ergebnis:

$$e^{2\Phi} = \left[\frac{3}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{r_s}{r_g}} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{r_s \cdot r^2}{r_g^3}} \right]^2$$

Dies ist der andere Teil der Schwarzschildmetrik, den wir als innere Schwarzschildlösung bezeichnen.



Bild: Spitzer Spies Supernova Remnant HBH 3

https://www.jpl.nasa.gov/spaceimages/images/largesize/PIA22564_hires.jpg

5.4 Die Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik oder der Raum expandiert

Man betrachtet eine Metrik der Form $g_{ij}=0$ für $i \neq j$, sodass nur g_{ii} für die Berechnung des Ricci-Tensors infrage kommt. Wir bezeichnen diese Metrik als Diagonalmetrik. Die inverse Metrik ist dann auch eine Diagonalmetrik $g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}$. Die Christoffelsymbole ergeben sich dann über:

$$\Gamma_{\gamma\alpha}^{\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial q^{\gamma} \partial q^{\alpha}} \frac{\partial q^{\beta}}{\partial x^i}$$

oder bezüglich der Metrik aus:

$$\Gamma_{ab}^s = \frac{1}{2} g^{sr} \left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{br}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r} \right)$$

Daraus kann man den Riemannschen Krümmungstensor berechnen:

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial q^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial q^k} + \Gamma_{ik}^h \cdot \Gamma_{hj}^l - \Gamma_{ij}^h \cdot \Gamma_{hk}^l.$$

Durch Tensorverjüngung erhält man den Ricci-Tensor der einsteinschen Feldgleichungen:

$$R_{ik} = R_{ilk}^l$$

$$R_{ilk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial q^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial q^k} + \Gamma_{ik}^h \cdot \Gamma_{hl}^l - \Gamma_{il}^h \cdot \Gamma_{hk}^l$$

$$\Gamma_{ab}^1 = \frac{1}{2} g^{1r} \left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{br}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r} \right) \quad \Gamma_{ab}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\frac{\partial g_{a1}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b1}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^1} \right)$$

$$\Gamma_{ab}^2 = \frac{1}{2} g^{2r} \left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{br}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r} \right) \quad \Gamma_{ab}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\frac{\partial g_{a2}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b2}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^2} \right)$$

$$\Gamma_{ab}^3 = \frac{1}{2} g^{3r} \left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{br}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r} \right) \quad \Gamma_{ab}^3 = \frac{1}{2} g^{33} \left(\frac{\partial g_{a3}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b3}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^3} \right)$$

$$\Gamma_{ab}^4 = \frac{1}{2} g^{4r} \left(\frac{\partial g_{ar}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{br}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^r} \right) \quad \Gamma_{ab}^4 = \frac{1}{2} g^{44} \left(\frac{\partial g_{a4}}{\partial q^b} + \frac{\partial g_{b4}}{\partial q^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial q^4} \right)$$

Γ_{ab}^1 :

| | | | |
|---|--|--|--|
| $\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^1}$ | $\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^2}$ | $\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^3}$ | $\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^4}$ |
| $\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^2}$ | $-\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$ | 0 | 0 |
| $\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^3}$ | 0 | $-\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$ | 0 |
| $\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^4}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{2} g^{11} \frac{\partial g_{44}}{\partial q^1}$ |

Γ_{ab}^2 :

| | | | |
|--|---|--|--|
| $-\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^2}$ | $\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$ | 0 | 0 |
| $\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$ | $\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^2}$ | $\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^3}$ | $\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^4}$ |
| 0 | $\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^3}$ | $-\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$ | 0 |
| 0 | $\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^4}$ | 0 | $-\frac{1}{2} g^{22} \frac{\partial g_{44}}{\partial q^2}$ |

Γ_{ab}^3 :

| | | | |
|--|--|---|--|
| $-\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{11}}{\partial q^3}$ | 0 | $\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$ | 0 |
| 0 | $-\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{22}}{\partial q^3}$ | $\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$ | 0 |
| $\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$ | $\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$ | $\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^3}$ | $\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^4}$ |
| 0 | 0 | $\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{33}}{\partial q^4}$ | $-\frac{1}{2} g^{33} \frac{\partial g_{44}}{\partial q^3}$ |

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Γ_{ab}^4 :

| | | | |
|--|--|--|---|
| $-\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{11}}{\partial q^4}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^1}$ |
| 0 | $-\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{22}}{\partial q^4}$ | 0 | $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^2}$ |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{33}}{\partial q^4}$ | $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^3}$ |
| $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^1}$ | $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^2}$ | $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^3}$ | $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^4}$ |

Eine Vereinfachung ergibt sich, wenn man Folgendes annimmt: $g_{11} = \text{Konstant}$,
 $g_{22} = g_{22}(q^1, q^2)$, $g_{33} = g_{33}(q^1, q^2)$ und $g_{44} = g_{44}(q^1, q^2, q^3)$ mit den Raumzeitkoordinaten:
 (q^1, q^2, q^3, q^4) , wobei q^1 für die Zeit steht..

Γ_{ab}^1 :

| | | | |
|---|--|--|--|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $-\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$ | 0 |
| 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}g^{11}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^1}$ |

Γ_{ab}^2 :

| | | | |
|---|---|--|--|
| 0 | $\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$ | 0 | 0 |
| $\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial q^1}$ | $\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{22}}{\partial q^2}$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | $-\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$ | 0 |
| 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}g^{22}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^2}$ |

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

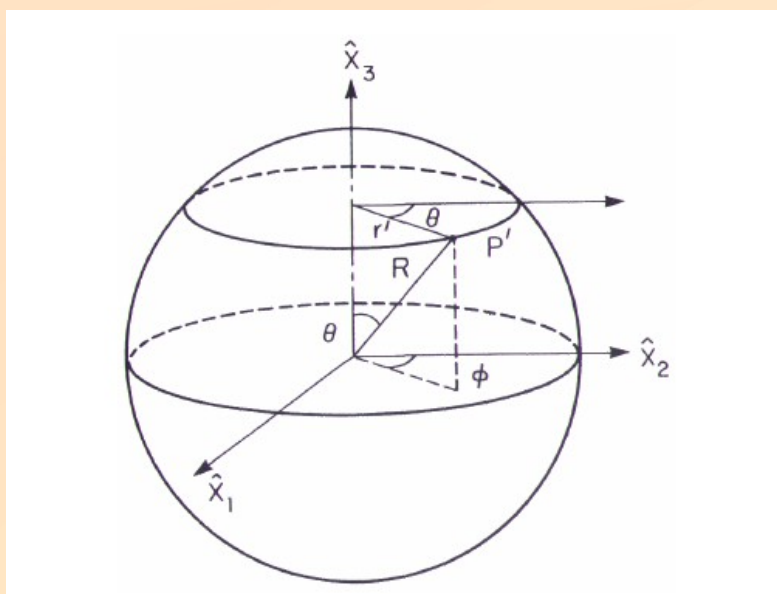
Γ_{ab}^3 :

| | | | |
|---|---|---|--|
| 0 | 0 | $\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$ | 0 |
| 0 | 0 | $\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$ | 0 |
| $\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial q^1}$ | $\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{33}}{\partial q^2}$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | $-\frac{1}{2}g^{33}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^3}$ |

Γ_{ab}^4 :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^1}$ |
| 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^2}$ |
| 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^3}$ |
| $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^1}$ | $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^2}$ | $\frac{1}{2}g^{44}\frac{\partial g_{44}}{\partial q^3}$ | 0 |

Als Beispiel einer solchen Metrik kann man die Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik betrachten. Um sie herzuleiten, beschreibt man einen Punkt P auf der Kugeloberfläche.



Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

durch die Koordinaten (r', Φ, Θ) . Dadurch ergibt sich für die kartesischen Koordinaten:

$$x_1 = r' \cdot \cos \Phi \quad x_2 = r' \cdot \sin \Phi \quad x_3 = \sqrt{R^2 - r'^2}.$$

Man erhält folgende neuen Basisvektoren:

$$\vec{v}_1 = \cos \Phi \cdot \vec{e}_1 + \sin \Phi \vec{e}_2 - \frac{r'}{\sqrt{R^2 - r'^2}} \cdot \vec{e}_3 \quad \vec{v}_2 = -r' \cdot \sin \Phi \cdot \vec{e}_1 + r' \cdot \cos \Phi \vec{e}_2 \quad \vec{v}_3 = 0$$

und für den metrischen Tensor:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{r'^2}{R^2 - r'^2} & 0 & 0 \\ 0 & r'^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad ds^2 = \frac{R^2}{R^2 - r'^2} dr'^2 + r'^2 d\Phi^2$$

als zweidimensionale Metrik. Führt man $r = \frac{r'}{R} = \sin \omega \in [0; 1]$ ein, so ergibt sich eine weitere Vereinfachung:

$$ds^2 = R^2 \cdot \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Phi^2 \right).$$

Geht man analog für die dreidimensionale Sphäre vor, erhält man als Linienelement:

$$ds^2 = R^2 \cdot \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\Phi^2 \right)$$

Daraus ergibt sich die Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik wie folgt:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \cdot \left(\frac{dr^2}{1 - k \cdot r^2} + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\Phi^2 \right).$$

Dabei gibt der Parameter $k = 1$ an, dass es sich um einen geschlossenen Raum handelt. Der Parameter $k = 0$ gibt an, ob es ein flacher Raum ist, und $k = -1$ gibt an, ob es ein hyperbolischer Raum ist. Die Koordinaten entsprechen der Reihenfolge $(q^1, q^2, q^3, q^4) = (t, r, \Theta, \Phi)$.

Für $r^2(d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\Phi^2)$ schreibt man kurz: $r^2 d\Omega^2$ und erhält damit die kompakte Form:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \cdot \left(\frac{dr^2}{1 - k \cdot r^2} + r^2 d\Omega^2 \right).$$

Für den flachen Raum ($k=0$) ergibt sich damit:

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \cdot (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \quad .$$

Für den geschlossenen Raum (k=1) ergibt sich mit $r = \sin(\omega)$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \cdot (d\omega^2 + \sin^2(\omega) d\Omega^2) \quad .$$

Für den hyperbolischen Raum (k=-1) ergibt sich mit $r = \sinh(\omega)$:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \cdot (d\omega^2 + \sinh^2(\omega) d\Omega^2) \quad .$$

Man erhält: $g_{11} = c^2$ $g_{22} = \frac{-R^2(t)}{1 - k \cdot r^2}$ $g_{33} = -R^2(t) \cdot r^2$ $g_{44} = -R^2(t) \cdot r^2 \sin^2 \Theta$.

Γ_{ab}^1 :

| | | | |
|---|-----------------------------------|----------------------------|--|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | $\frac{R'(t)R(t)}{c^2(1 - kr^2)}$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | $\frac{R'(t)R(t)r^2}{c^2}$ | 0 |
| 0 | 0 | 0 | $\frac{R'(t)R(t)r^2 \sin^2 \Theta}{c^2}$ |

Γ_{ab}^2 :

| | | | |
|----------------------|-----------------------|----------------|-------------------------------|
| 0 | $\frac{R'(t)}{R(t)}$ | 0 | 0 |
| $\frac{R'(t)}{R(t)}$ | $\frac{kr}{1 - kr^2}$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | $-r(1 - kr^2)$ | 0 |
| 0 | 0 | 0 | $-r \sin^2 \Theta (1 - kr^2)$ |

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Γ_{ab}^3 :

| | | | |
|----------------------|---------------|----------------------|----------------------------|
| 0 | 0 | $\frac{R'(t)}{R(t)}$ | 0 |
| 0 | 0 | $\frac{1}{r}$ | 0 |
| $\frac{R'(t)}{R(t)}$ | $\frac{1}{r}$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | $-\sin \Theta \cos \Theta$ |

Γ_{ab}^4 :

| | | | |
|----------------------|---------------|---------------|----------------------|
| 0 | 0 | 0 | $\frac{R'(t)}{R(t)}$ |
| 0 | 0 | 0 | $\frac{1}{r}$ |
| 0 | 0 | 0 | $\cot \Theta$ |
| $\frac{R'(t)}{R(t)}$ | $\frac{1}{r}$ | $\cot \Theta$ | 0 |

Die Berechnung des Ricci-Tensors erfolgt über:

$$R^l_{ilk} = \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial q^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{il}}{\partial q^k} + \Gamma^h_{ik} \cdot \Gamma^l_{hl} - \Gamma^h_{il} \cdot \Gamma^l_{hk} \quad R_{11} = R^l_{111} = \frac{\partial \Gamma^l_{11}}{\partial q^l} - \frac{\partial \Gamma^l_{1l}}{\partial q^1} + \Gamma^h_{11} \cdot \Gamma^l_{hl} - \Gamma^h_{1l} \cdot \Gamma^l_{h1}$$

$$\frac{\partial \Gamma^l_{11}}{\partial q^l} = 0 \text{ für alle } l, \quad \frac{-\partial \Gamma^l_{1l}}{\partial q^1} = -3 \frac{\partial}{\partial t} \frac{R'(t)}{R(t)}, \quad \Gamma^h_{11} = 0 \forall h \Rightarrow \Gamma^h_{11} \cdot \Gamma^l_{hl} = 0, \quad \Gamma^1_{1l} \cdot \Gamma^l_{11} = 0$$

$$, \quad \Gamma^2_{1l} \cdot \Gamma^l_{21} = \left[\frac{R'(t)}{R(t)} \right]^2, \quad \Gamma^3_{1l} \cdot \Gamma^l_{31} = \left[\frac{R'(t)}{R(t)} \right]^2, \quad \Gamma^4_{1l} \cdot \Gamma^l_{41} = \left[\frac{R'(t)}{R(t)} \right]^2 \text{ und damit:}$$

$$R_{11} = \frac{-\partial \Gamma^l_{1l}}{\partial q^1} = -3 \frac{\partial}{\partial t} \frac{R'(t)}{R(t)} - 3 \left[\frac{R'(t)}{R(t)} \right]^2 = -3 \frac{R''(t)}{R(t)}.$$

$$R_{11} = -3 \frac{R''(t)}{R(t)}$$

$$R_{12} = \frac{\partial \Gamma_{12}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{1I}^I}{\partial q^2} + \Gamma_{12}^h \cdot \Gamma_{hI}^I - \Gamma_{1I}^h \cdot \Gamma_{h2}^I$$

$$\frac{\partial \Gamma_{12}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{1I}^I}{\partial q^2} = 0$$

$$+ \Gamma_{12}^1 \cdot \Gamma_{1I}^I - \Gamma_{1I}^1 \cdot \Gamma_{12}^I = 0$$

$$+ \Gamma_{12}^2 \cdot \Gamma_{2I}^I - \Gamma_{1I}^2 \cdot \Gamma_{22}^I = \frac{2R'(t)}{R(t) \cdot r}$$

$$+ \Gamma_{12}^3 \cdot \Gamma_{3I}^I - \Gamma_{1I}^3 \cdot \Gamma_{32}^I = -\frac{R'(t)}{R(t) \cdot r}$$

$$+ \Gamma_{12}^4 \cdot \Gamma_{4I}^I - \Gamma_{1I}^4 \cdot \Gamma_{42}^I = -\frac{R'(t)}{R(t) \cdot r}$$

$$R_{12} = R_{21} = 0$$

$$R_{13} = \frac{\partial \Gamma_{13}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{1I}^I}{\partial q^3} + \Gamma_{13}^h \cdot \Gamma_{hI}^I - \Gamma_{1I}^h \cdot \Gamma_{h3}^I \quad R_{13} = \frac{\partial \Gamma_{13}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{1I}^I}{\partial q^3} + \Gamma_{13}^h \cdot \Gamma_{hI}^I - \Gamma_{1I}^h \cdot \Gamma_{h3}^I$$

$$\frac{\partial \Gamma_{13}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{1I}^I}{\partial q^3} = 0$$

$$+ \Gamma_{13}^1 \cdot \Gamma_{1I}^I - \Gamma_{1I}^1 \cdot \Gamma_{13}^I = 0$$

$$+ \Gamma_{13}^2 \cdot \Gamma_{2I}^I - \Gamma_{1I}^2 \cdot \Gamma_{23}^I = 0$$

$$+ \Gamma_{13}^3 \cdot \Gamma_{3I}^I - \Gamma_{1I}^3 \cdot \Gamma_{33}^I = \frac{R'(t)}{R(t)} \cdot \cot \Theta$$

$$+ \Gamma_{13}^4 \cdot \Gamma_{4I}^I - \Gamma_{1I}^4 \cdot \Gamma_{43}^I = -\frac{R'(t)}{R(t)} \cdot \cot \Theta$$

$$R_{13} = R_{31} = 0$$

$$R_{14} = \frac{\partial \Gamma_{14}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{1I}^I}{\partial q^4} + \Gamma_{14}^h \cdot \Gamma_{hI}^I - \Gamma_{1I}^h \cdot \Gamma_{h4}^I$$

$$\frac{\partial \Gamma_{14}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{1I}^I}{\partial q^4} = 0$$

$$+ \Gamma_{14}^1 \cdot \Gamma_{1I}^I - \Gamma_{1I}^1 \cdot \Gamma_{14}^I = 0$$

$$+ \Gamma_{14}^2 \cdot \Gamma_{2I}^I - \Gamma_{1I}^2 \cdot \Gamma_{24}^I = 0$$

$$+ \Gamma_{14}^3 \cdot \Gamma_{3I}^I - \Gamma_{1I}^3 \cdot \Gamma_{34}^I = 0$$

$$+ \Gamma_{14}^4 \cdot \Gamma_{4I}^I - \Gamma_{1I}^4 \cdot \Gamma_{44}^I = 0$$

$$R_{14} = R_{41} = 0$$

$$R_{23} = \frac{\partial \Gamma_{23}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{2I}^I}{\partial q^3} + \Gamma_{23}^h \cdot \Gamma_{hI}^I - \Gamma_{2I}^h \cdot \Gamma_{h3}^I$$

$$\frac{\partial \Gamma_{23}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{2I}^I}{\partial q^3} = 0$$

$$+ \Gamma_{23}^h \cdot \Gamma_{hI}^I - \Gamma_{2I}^h \cdot \Gamma_{h3}^I = \frac{1}{r} \cdot \cos \Theta - \frac{1}{r} \cdot \cos \Theta = 0$$

$$R_{23} = R_{32} = 0$$

$$R_{24} = \frac{\partial \Gamma_{24}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{2I}^I}{\partial q^4} + \Gamma_{24}^h \cdot \Gamma_{hI}^I - \Gamma_{2I}^h \cdot \Gamma_{h4}^I$$

$$\frac{\partial \Gamma_{24}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{2I}^I}{\partial q^4} = 0$$

$$+ \Gamma_{24}^h \cdot \Gamma_{hI}^I - \Gamma_{2I}^h \cdot \Gamma_{h4}^I = 0$$

$$R_{24} = R_{42} = 0$$

$$R_{34} = \frac{\partial \Gamma_{34}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{3I}^I}{\partial q^4} + \Gamma_{34}^h \cdot \Gamma_{hI}^I - \Gamma_{3I}^h \cdot \Gamma_{h4}^I$$

$$\frac{\partial \Gamma_{34}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{3I}^I}{\partial q^4} = 0$$

$$+ \Gamma_{34}^h \cdot \Gamma_{hI}^I - \Gamma_{3I}^h \cdot \Gamma_{h4}^I = 0$$

$$R_{34} = R_{43} = 0$$

Damit erhält man folgendes Zwischenergebnis:

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} -3 \frac{R''(t)}{R(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{44} \end{pmatrix}$$

$$R_{22} = \frac{\partial \Gamma_{22}^I}{\partial q^I} - \frac{\partial \Gamma_{2I}^I}{\partial q^2} + \Gamma_{22}^h \cdot \Gamma_{hI}^I - \Gamma_{2I}^h \cdot \Gamma_{h2}^I$$

$$\begin{aligned}
 R_{22} &= \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial q^1} - \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial q^2} = \frac{R''(t) \cdot R(t) + R'^2(t)}{c^2(1-kr^2)} + \frac{2}{r^2} \\
 + \Gamma_{22}^1 \cdot \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{21}^1 \cdot \Gamma_{12}^1 &= 2 \cdot \frac{R'^2(t)}{c^2(1-kr^2)} + \Gamma_{22}^2 \cdot \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{21}^2 \cdot \Gamma_{22}^1 = \frac{2k}{1-kr^2} - \frac{R'^2(t)}{c^2(1-kr^2)} \\
 + \Gamma_{22}^3 \cdot \Gamma_{31}^1 - \Gamma_{21}^3 \cdot \Gamma_{32}^1 &= -\frac{1}{r^2} + \Gamma_{22}^4 \cdot \Gamma_{41}^1 - \Gamma_{21}^4 \cdot \Gamma_{42}^1 = -\frac{1}{r^2}
 \end{aligned}$$

$$R_{22} = \frac{R''(t)R(t) + 2R'^2(t) + 2kc^2}{c^2(1-kr^2)} \quad g_{22} = \frac{-R^2(t)}{1-kr^2} \quad g^{22} = \frac{1-kr^2}{-R^2(t)}$$

$$R_{22} = \frac{R''(t)R(t) + 2R'^2(t) + 2kc^2}{c^2(1-kr^2)} = \frac{R''(t)R(t) + 2R'^2(t) + 2kc^2}{c^2(1-kr^2)} \cdot \frac{1-kr^2}{-R^2(t)} g_{22}$$

$$R_{22} = -\frac{R''(t)R(t) + 2R'^2(t) + 2kc^2}{c^2 R^2(t)} g_{22}$$

$$R_{22} = -\frac{2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] g_{22} .$$

Analog zeigt man für die beiden letzten Einträge des Ricci-Tensors:

$$R_{33} = -\frac{2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] g_{33}$$

$$R_{44} = -\frac{2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] g_{44}$$

Damit hat der Ricci-Tensor folgende Gestalt:

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{c^2} \frac{R''(t)}{R(t)} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] g_{44} \end{pmatrix}$$

Wir können also folgenden Ausdruck für den Ricci-Tensor schreiben:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} \circ g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} \circ (\tilde{R}_{ij}) \quad \text{mit}$$

$$\tilde{R}_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{c^2} \frac{R''(t)}{R(t)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] \end{pmatrix}$$

Der Ricci-Skalar R ist die Tensorverjüngung von $R_i^j = g^{kj} R_{ik} = \text{spur } \tilde{R}_{ij}$. Damit erhält man:

$$R = -\frac{6}{c^2} \left[\frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right]$$

Die einsteinsche Feldgleichung lautet dann in der erweiterten Form mit der kosmologischen Konstanten:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} T_{ij}.$$

Für R_{11} erhält man dann folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} R_{11} - \frac{1}{2} R g_{11} + \Lambda g_{11} &= \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} T_{11} \\ -3 \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{3}{c^2} \left[\frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] c^2 + \Lambda c^2 &= \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} T_{11} \\ 3 \left[\frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{kc^2}{R^2(t)} \right] + \Lambda c^2 &= \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} T_{11} \end{aligned}$$

Für den Energie-Impuls Tensor hat man: $T_i^j = \begin{pmatrix} \rho c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$. Multiplikation mit g_{ij} liefert

$$\text{dann: } T_{ij} = \begin{pmatrix} \rho c^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p \frac{R^2(t)}{1-k \cdot r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p R^2(t) \cdot r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p R^2(t) \cdot r^2 \sin^2 \Theta \end{pmatrix}$$

Dies liefert:

$$\frac{R'^2(t)}{R^2(t)} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3} \rho - \frac{k c^2}{R^2(t)} - \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1)$$

Die nicht lineare Differenzialgleichung 1. Ordnung kann man zu einer Differenzialgleichung 2. Ordnung umformen.

$$\begin{aligned} R_{22} - \frac{1}{2} R g_{22} + \Lambda g_{22} &= \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} T_{22} & \frac{R_{22}}{g_{22}} - \frac{1}{2} R + \Lambda &= \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} p \\ -\frac{2}{c^2} \left[\frac{1}{2} \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{k c^2}{R^2(t)} \right] + \frac{3}{c^2} \left[\frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{k c^2}{R^2(t)} \right] &= -\frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} p - \Lambda \\ \frac{1}{c^2} \left[2 \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} + \frac{k c^2}{R^2(t)} \right] &= -\frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} p - \Lambda \\ 2 \frac{R''(t)}{R(t)} + \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} &= -\frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^2} p - \frac{k c^2}{R^2(t)} - \Lambda \cdot c^2 \\ \frac{R'^2(t)}{R^2(t)} &= \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3} \rho - \frac{k c^2}{R^2(t)} - \frac{\Lambda c^2}{3} \end{aligned}$$

Subtrahiert man von der unteren die obere Gleichung, so erhält man eine Differenzialgleichung 2. Ordnung:

$$\frac{R''(t)}{R(t)} = -\frac{4 \cdot \pi \cdot G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) - \frac{1}{3} \Lambda \cdot c^2 \quad (2)$$

Die beiden Differenzialgleichungen (1) und (2) bezeichnet man als die Friedmann Gleichungen, über die man das Hubble Gesetz und die Entwicklung des Universums ableiten kann.

Die Friedmann Gleichungen werden in der Literatur wie folgt angegeben:

$$\frac{R'^2(t)}{R^2(t)} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3} \rho - \frac{k c^2}{R^2(t)} + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (1)$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$\frac{R''(t)}{R(t)} = -\frac{4 \cdot \pi \cdot G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) + \frac{1}{3} \Lambda \cdot c^2 \quad (2)$$

Das negative Vorzeichen bei der kosmologischen Konstanten in den hier hergeleiteten Gleichungen kommt daher, dass die einsteinsche Feldgleichung mit

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} + \Lambda g_{ij} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} T_{ij}$$

angegeben wurde. Schreibt man die kosmologische Konstante auf die rechte Seite der Gleichung

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{c^4} T_{ij} + \Lambda g_{ij} ,$$

so erhält man die in der Literatur angegebenen Gleichungen.

Für eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung (1) definiert man die Hubble Funktion

$$H(t) = \frac{R'(t)}{R(t)} .$$

Damit geht Gleichung (1) über in $H^2(t) = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3} \rho - \frac{k c^2}{R^2(t)} + \frac{\Lambda c^2}{3}$. Man stellt sich die Energiedichte ρc^2 immer homogen verteilt vor. Wegen der Energieerhaltung gilt deshalb zu allen Zeiten: $\rho R^3(t) = \rho_0 R_0^3$. Dabei sind die Größen mit dem 0 Index die momentanen Werte des Universums.

Multiplikation mit 1 ergibt:

$$H^2(t) = \frac{H_0^2}{H_0^2} \left(\frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3} \rho - \frac{k c^2}{R^2(t)} + \frac{\Lambda c^2}{3} \right) = H_0^2 \left(\frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3 H_0^2} \rho - \frac{k c^2}{R^2(t) H_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3 H_0^2} \right) .$$

Ersetzen von $\rho = \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3(t)}$ ergibt: $H^2(t) = H_0^2 \left(\frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3 H_0^2} \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3(t)} - \frac{k c^2}{R^2(t) H_0^2} + \frac{\Lambda c^2}{3 H_0^2} \right) .$

Man führt folgende Konstanten ein: $\Omega_M = \frac{8 \cdot \pi \cdot G}{3 H_0^2} \rho_0$ $\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3 H_0^2}$ woraus man die Gleichungen

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\Omega_M \frac{R_0^3}{R^3(t)} - \frac{k c^2}{R^2(t) H_0^2} + \Omega_\Lambda \right)$$

erhält. Für $t = t_0$ erhält man:

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$H^2(t_0) = H_0^2 \left(\Omega_M \frac{R_0^3}{R^3(t_0)} - \frac{kc^2}{R^2(t_0) H_0^2} + \Omega_\Lambda \right)$ mit $H^2(t_0) = H_0^2$ und $R(t_0) = R_0$ ergibt das:

$1 = \Omega_M - \frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2} + \Omega_\Lambda$ oder: $\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2} = \Omega_M + \Omega_\Lambda - 1$. Damit hat die Friedmann Gleichung die Form:

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\Omega_M \frac{R_0^3}{R^3(t)} + (1 - \Omega_M - \Omega_\Lambda) \frac{R_0^2}{R^2(t)} + \Omega_\Lambda \right)$$

Für ein flaches Universum ist $k=0$ und damit $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$, sodass gilt:

$$H^2(t) = H_0^2 \left(\Omega_M \frac{R_0^3}{R^3(t)} + \Omega_\Lambda \right) \quad (3)$$

Diese Gleichung kann man durch Trennung der Variablen direkt durch Integration lösen:

$$H^2 = H_0^2 \left(\Omega_M \frac{R_0^3}{R^3} + \Omega_\Lambda \right) \text{ liefert: } H = H_0 \sqrt{\left(\Omega_M \frac{R_0^3}{R^3} + \Omega_\Lambda \right)} \text{ und damit } \frac{dr}{R} = H_0 \sqrt{\left(\Omega_M \frac{R_0^3}{R^3} + \Omega_\Lambda \right)} dt.$$

Damit hat man, wenn die Differenziale getrennt werden:

$$dt = \frac{dr}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} R \sqrt{\left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \frac{R_0^3}{R^3} + 1 \right)}}.$$

Man führt folgende Substitution durch: $z = \frac{R_0}{R}$, $R = \frac{R_0}{z}$ $dR = -\frac{R^2}{R_0} dz$ und erhält:

$$dt = - \frac{dz}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} z \sqrt{\left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} z^3 + 1 \right)}} \quad (i).$$

Eine weitere Substitution $u = \sqrt{\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} z^3 + 1}$ liefert $z^3 = \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} (u^2 - 1)$ und damit

$$z^2 = \left[\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} (u^2 - 1) \right]^{\frac{2}{3}} \text{ bzw. } z = \left[\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} (u^2 - 1) \right]^{\frac{1}{3}}. \text{ Weiterhin ist: } dz = -\frac{3}{2} \frac{u}{\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \left[\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} (u^2 - 1) \right]^{\frac{2}{3}}}.$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Einsetzen in (i) ergibt dann ein elementares Integral, das man durch Partialbruchzerlegung integrieren kann:

$$dt = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \frac{1}{u^2-1} = -\frac{1}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) du \quad .$$

$$t-t_0 = -\frac{1}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln\left(\frac{u+1}{u-1}\right) \quad \text{(ii).}$$

Da $u = \sqrt{\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} z^3 + 1}$ ist, gilt:

$$t-t_0 = -\frac{1}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln\left(\frac{\sqrt{\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} z^3 + 1} + 1}{\sqrt{\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} z^3 + 1} - 1}\right) = -\frac{1}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln\left(\frac{\sqrt{\Omega_M z^3 + \Omega_\Lambda} + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_M z^3 + \Omega_\Lambda} - \sqrt{\Omega_\Lambda}} \cdot \frac{\sqrt{z^{-3}}}{\sqrt{z^{-3}}}\right) \quad .$$

$$t-t_0 = -\frac{1}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln\left(\frac{\sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda z^{-3}} + \sqrt{\Omega_\Lambda} \sqrt{z^{-3}}}{\sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda z^{-3}} - \sqrt{\Omega_\Lambda} \sqrt{z^{-3}}}\right) \quad \text{mit } z^{-1} = \frac{R}{R_0} \quad . \text{ Heute gilt: } R=R_0 \text{ und damit}$$

$$\text{erhält man für das **Alter des Universums** den Schätzwert: } t_0 = \frac{1}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln\left(\frac{\sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda} + \sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_M + \Omega_\Lambda} - \sqrt{\Omega_\Lambda}}\right) \quad .$$

mit der Annahme $\Omega_M + \Omega_\Lambda = 1$ liefert das:

$$t_0 = \frac{1}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{\Omega_\Lambda}}{1-\sqrt{\Omega_\Lambda}}\right) \quad \text{(iii)}$$

Als Lösung der Differenzialgleichung erhält man: $R(t) = R_0 \sqrt[3]{\frac{\Omega_M \sinh^2(\omega t)}{\Omega_\Lambda}}$ mit $\omega = \frac{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}}{2}$. Für die Hubble Funktion $H(t) = \frac{R'(t)}{R(t)}$ ergibt dies:

$$H(t) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} \coth(\omega t) \quad \text{(iv).}$$

Mit $H_0 = 67,15 \text{ km/s/Mpc}$ ergibt sich die Hubble Zeit $\frac{1}{H_0} = \frac{30856775814914}{67,15 \cdot 3600 \cdot 24 \cdot 365,25} 10^6 = 14,5613 \text{ Mrd. Jahre} \quad .^{40}$

Die Werte für die Dichteparameter sind: $\Omega_M = 0,315 \pm 0,013$ und $\Omega_\Lambda = 0,685 \pm 0,013 \quad .^{41}$

Als Skalierungsfaktor erhält man nach (iii): $\frac{1}{3\sqrt{0,685}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{0,685}}{1-\sqrt{0,685}}\right) \approx 0,950985 \quad .$

⁴⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Hubble-Konstante#Hubble-Zeit>

⁴¹ <https://de.wikipedia.org/wiki/Dichteparameter>

Für das Alter unseres Universums liefert das den Schätzwert von: 13,8473 Mrd. Jahre.

Die Friedmann Gleichung $\frac{R'(t)}{R(t)} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{R^2(t)} + \frac{\Lambda c^2}{3}$ hat eine einfache Lösung, wenn wir ein leeres, flaches Universum voraussetzen. Dann gilt: $\rho=0$ und $k=0$. Man erhält dann die Differenzialgleichung:

$$\frac{R'(t)}{R(t)} = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}.$$

Mit Trennung der Variablen liefert das:

$$d \ln(R(t)) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} dt.$$

Durch Integration ergibt sich:

$$\ln(R(t)) = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} t$$

und damit als Lösung:

$$R(t) = e^{\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} t}.$$

Da die Hubble Konstante $H_0 = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}$ in diesem Fall ist, kann man auch $R(t) = e^{H_0 t}$ schreiben.

Man nennt diese Lösung der einsteinschen Feldgleichungen das De-Sitter-Modell.⁴² Dabei handelt es sich um eine flache, immaterielle Raumzeit mit einer positiven kosmologischen Konstante Λ .

1928 richtet Edwin Hubble im Mount Wilson Observatorium das damals beste Teleskop auf entfernte Galaxien. Dabei entdeckt er, dass das Licht von entfernten Galaxien rot verschoben ist. Er folgert daraus, dass die Galaxien sich von uns weg bewegen, und zwar umso schneller, je weiter sie weg von unserer Heimatgalaxie sind. Nur nahe Galaxien, wie z. B. der Andromeda Nebel, bewegen sich auf die Milchstraße zu, weil die Gravitation dafür stark genug ist.

Daraus folgert er, dass vor langer Zeit die Galaxien nahe beieinander gewesen sein müssen. Ein belgischer katholischer Priester – Georges Lemaître – geht anders an die Sachlage heran. Er benutzt die oben dargestellte Metrik und die einsteinsche Feldgleichung, um daraus zu folgern, dass sich der Raum im Laufe der Zeit ausgedehnt hat und sich in Zukunft auch weiter ausdehnen wird. Heute weiß man, dass es keinen Umkehrpunkt für die Ausdehnung gibt. Der Raum wird sich also in Zukunft nicht mehr zusammenziehen. Man hat sogar durch weitere Messungen entdeckt, dass die Ausdehnungsgeschwindigkeit des Raumes sogar eine beschleunigte Ausdehnung ist. Der Grund für Hubbles Beobachtung ist also der sich vergrößernde Raum, der die Lichtwellen auseinanderzieht und damit langwelliger macht – also für sichtbares Licht in den roten Teil des Lichtspektrums verschiebt.

⁴² <https://de.wikipedia.org/wiki/De-Sitter-Modell#Mathematisches>

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Lemaître folgerte daraus, dass der Raum des Universums einmal sehr klein war, kleiner als ein Atomkern, und dass sich das Universum durch die Freisetzung von Energie spontan ausgedehnt hat. Die Folgen der Ausdehnung müssen also heute noch sichtbar sein. Hat es zu einem sehr frühen Zeitpunkt des Universums schon Licht gegeben, dann hat sich die Wellenlänge dieses alten Lichtes so weit vergrößert, dass dieses Licht heute im Mikrowellenbereich detektierbar sein müsste. Tatsächlich fanden die beiden Physiker Arno Penzias und Robert Wilson 1964 den Beweis für diese Hypothese. Sie entdeckten mit einer geeigneten Antenne eine Mikrowellenstrahlung, die in allen Richtungen vorhanden war. Damit war der Beweis erbracht, dass unser Universum einst in einem Big Bang geboren wurde.

Es gibt unterschiedliche physikalische Ursachen für die Rotverschiebung:

- Bewegung einer Lichtquelle
- Rotverschiebung durch Gravitation
- Kosmologische Rotverschiebung

Bezeichnet man mit λ_e die Wellenlänge des von einer fernen Galaxie emittierten Lichts und mit λ_a die Wellenlänge des auf der Erde beobachteten Lichts, dann hat man folgende Beziehung:

$$z = \frac{\lambda_a - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_a}{\lambda_e} - 1 \quad .$$

Da das Licht mit der Wellenlänge λ_e zum Zeitpunkt t_e und das absorbierte Licht zum jetzigen Zeitpunkt t_a empfangen wird, gilt mit dem Skalierungsfaktor $1 = R(t_a)$:

$$z = \frac{\lambda_a - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{1}{a(t_e)} - 1$$

für die Rotverschiebung.

5.5 Der De-Sitter-Raum und der Anti-De-Sitter-Raum⁴³

Der De-Sitter-Raum ist also eine Lösung der homogenen Feldgleichung. In beliebigen Dimensionen n gilt dann:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} + \Lambda g_{ij} = 0 \quad .$$

Umstellen liefert:

$$R_{ij} = \left(\frac{1}{2} R - \Lambda \right) g_{ij} \quad .$$

Der Ricci-Tensor ist also ein Vielfaches des metrischen Tensors. Multipliziert man die Gleichung mit g^{ij} , so erhält man:

$$R_i^j = \left(\frac{1}{2} R - \Lambda \right) \delta_i^j \quad .$$

Tensorverjüngung liefert dann:

$$R = n \left(\frac{1}{2} R - \Lambda \right) \quad .$$

Auflösen nach R ergibt:

$$\Lambda = \frac{R}{2} - \frac{R}{n} = R \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) = R \frac{n-2}{2n}$$

$$R = \frac{2n}{n-2} \Lambda \quad .$$

Gesucht sind also Mannigfaltigkeiten, die einen konstanten Krümmungsskalar R haben. Dazu betrachtet man die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = -x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Für ein konstantes r heißt die Hyperfläche $S_1^n(r) = f^{-1}(r^2)$ der n -dimensionale De-Sitter-Raum. Man muss nun über die Metrik den Ricci-Tensor und somit den Ricci-Skalar berechnen. Dazu benutzt man Verfahren aus der Differenzialgeometrie, um die umständlichen Berechnungen über die Tensoren zu vereinfachen.

⁴³ <https://de.wikipedia.org/wiki/De-Sitter-Raum>

Es existiert ein Diffeomorphismus von $S_1^n(r)$ nach $\mathbb{R} \times S^{n-1}$, der wie folgt definiert ist:

$$\Phi_r(x_0, \hat{x}) = (x_0, \frac{\hat{x}}{\sqrt{r^2 + x_0^2}}) \quad \text{bzw.} \quad \Phi_r^{-1}(y_0, \hat{y}) = (y_0, \sqrt{r^2 + y_0^2} \cdot \hat{y}) \quad .$$

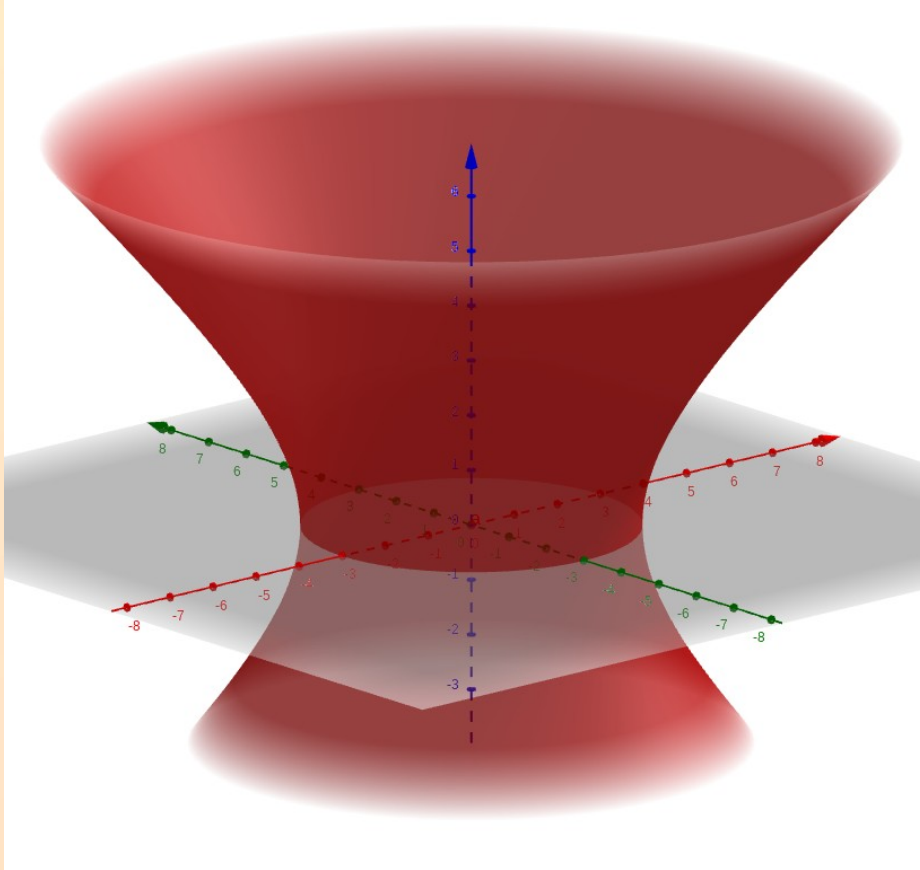


Abbildung: Zweidimensionaler De-Sitter-Raum, gemeinfrei, Günter Opitz-Ohlsen

Der Gradient der Abbildung f oder der Normalenvektor zur Hyperebene, die durch $S_1^n(r) = f^{-1}(r^2)$ bezüglich der Minkowskimetrik g gegeben ist, lautet:

$$g \nabla(f) = \text{grad}(f) = (2x_0, 2x_1, \dots, 2x_n) \quad (\text{Gradient und Metrik}).$$

Die Länge des Normalenvektors bezüglich der Minkowskimetrik ist dann:

$$|\text{grad}(f)|^2 = -4x_0^2 + 4x_1^2 + \dots + 4x_n^2 = 4r^2$$

Dies liefert für den Normalen-Einheitsvektor:

$$\vec{N} = \frac{1}{2r} \text{grad}(f)$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Ist \vec{H} ein Vektor aus dem Tangentialraum der Hyperebene, dann gilt für ein Vektorfeld \vec{V} auf der Hyperebene:

$$D_{\vec{H}} \vec{V} = \vec{H} \cdot (\nabla \otimes \vec{V}) = J_{\vec{V}} \cdot \vec{H} \quad .$$

Dabei ist $J_{\vec{V}}$ die Jacobimatrix des Vektorfeldes \vec{V} . Setzt man $\vec{V} = \vec{N}$, so liefert die Abbildung:

$$W(H) = D_{\vec{H}} \vec{N} = J_{\vec{N}} \cdot \vec{H}$$

wegen $D_{\vec{H}} \langle \vec{N}, \vec{N} \rangle = \langle 2 D_{\vec{H}} \vec{N}, \vec{N} \rangle = 0$, dass $D_{\vec{H}} \vec{N} \perp \vec{N}$ und damit eine Abbildung

$W: T(S_1^n(r)) \rightarrow T(S_1^n(r)); W(H) = D_{\vec{H}} \vec{N}$ definiert ist. Diese Abbildung nennt man Weingartenabbildung. Da $D_{\vec{H}} \vec{N} = J_{\vec{N}} \cdot \vec{H}$ gilt, muss man die Jacobimatrix des Vektorfeldes

$$\vec{N} = \frac{1}{2r} (2x_0, 2x_1, \dots, 2x_n) = \frac{1}{r} (x_0, x_1, \dots, x_n) \text{ berechnen. Man sieht sofort, dass } J_{\vec{N}} = \frac{1}{r} E$$

gilt, wobei E hier die Einheitsmatrix bedeutet. Damit ist die Weingartenabbildung durch:

$$W(\vec{H}) = \frac{1}{r} \vec{H}$$

gegeben.

Hat man eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und hat der Tangentialraum eine Dimension größer als Eins, dann kann man die Fläche des Parallelogramms, die durch zwei Tangentialvektoren \vec{u} und \vec{v} aufgespannt wird, über die Formel:

$$\sqrt{g(\vec{v}, \vec{v}) + g(\vec{u}, \vec{u}) - g(\vec{v}, \vec{u})^2}$$

berechnen. Dabei ist g die Metrik auf dem Tangentialraum. Man kann dann zeigen, dass die Größe

$$K(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{g(R(\vec{u}, \vec{v}) \vec{v}, \vec{u})}{g(\vec{v}, \vec{v}) + g(\vec{u}, \vec{u}) - g(\vec{v}, \vec{u})^2}$$

nur von der Ebene abhängt, die durch die beiden Tangentialvektoren \vec{u} und \vec{v} aufgespannt wird, aber nicht von der Auswahl der Tangentialvektoren, die dieselbe Ebene aufspannen. Man nennt diese Größe die Schnittkrümmung.⁴⁴

Die Größe $R(\vec{u}, \vec{v}) \vec{w}$ ist der Riemannsche Krümmungstensor, der in der Differentialgeometrie wie folgt definiert ist:

$$R(\vec{u}, \vec{v}) \vec{w} = \nabla_{\vec{u}} \nabla_{\vec{v}} \vec{w} - \nabla_{\vec{v}} \nabla_{\vec{u}} \vec{w} - \nabla_{[\vec{u}, \vec{v}]} \vec{w} \quad .$$

Dabei ist das Symbol ∇ der Zusammenhang⁴⁵ der Mannigfaltigkeit und das Symbol $[\cdot, \cdot]$ entspricht der Lie-Klammer⁴⁶. Diese Formel stimmt mit der schon über die Christoffelsymbole

44 https://de.wikipedia.org/wiki/Schnittkr%C3%BCmmung#Beziehung_zur_gau%C3%9Fschen_Kr%C3%BCmmung

45 https://de.wikipedia.org/wiki/Riemannscher_Kr%C3%BCmmungstensor,
[https://de.wikipedia.org/wiki/Zusammenhang_\(Differentialgeometrie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Zusammenhang_(Differentialgeometrie))

46 <https://de.wikipedia.org/wiki/Lie-Ableitung>

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

erwähnte Formel für den Riemannschen-Krümmungstensor überein. Der Zusammenhang ist dabei über die Christoffelsymbole gegeben.

Nun ist $S_1^n(r)$ eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, die in den \mathbb{R}^{n+1} eingebettet ist. Dann lässt sich der Riemannsche Krümmungstensor über die Gauß-Formel berechnen:

$$R^{S_1^n(r)}(\vec{X}, \vec{Y})\vec{Z} = R^{\mathbb{R}^{n+1}}(\vec{X}, \vec{Y})\vec{Z} + g(W(\vec{Y}), Z)W(\vec{X}) - g(W(\vec{X}), Z)W(\vec{Y}) \quad .$$

Dabei steht das Symbol g für den metrischen Tensor. Mit der Weingartenabbildung W für $S_1^n(r)$ erhält man dann als Ergebnis:

$$R^{S_1^n(r)}(\vec{X}, \vec{Y})\vec{Z} = \frac{1}{r^2}(g(\vec{Y}, \vec{Z})\vec{X} - g(\vec{X}, \vec{Z})\vec{Y}) \quad .$$

In der Formel für die Schnittkrümmung kann man jetzt den Zähler berechnen. Dies liefert:

$$\begin{aligned} g(R(\vec{u}, \vec{v})\vec{v}, \vec{u}) &= g\left(\frac{1}{r^2}(g(\vec{v}, \vec{v})\vec{u} - g(\vec{u}, \vec{v})\vec{v}), \vec{u}\right) = \frac{1}{r^2}[g(g(\vec{v}, \vec{v})\vec{u}, \vec{u}) - g(g(\vec{u}, \vec{v})\vec{v}, \vec{u})] \\ g(R(\vec{u}, \vec{v})\vec{v}, \vec{u}) &= \frac{1}{r^2}[g(\vec{v}, \vec{v})g(\vec{u}, \vec{u}) - g(\vec{u}, \vec{v})g(\vec{v}, \vec{u})] = \frac{1}{r^2}(g(\vec{v}, \vec{v})g(\vec{u}, \vec{u}) - g(\vec{u}, \vec{v})^2) \quad . \end{aligned}$$

Dies entspricht dem $\frac{1}{r^2}$ fachen vom Nenner in der Schnittkrümmung. Deshalb hat man für den De-Sitter-Raum eine konstante Schnittkrümmung:

$$K(S_1^n(r)) = \frac{1}{r^2}$$

Der Ricci-Tensor ist die Tensorverjüngung des Riemannschen Krümmungstensors. D. h.:

$$ric(\vec{X}, \vec{Y}) = \sum_{i=0}^n \epsilon_i g(R(\vec{X}, e_i)e_i, \vec{Y})$$

mit $\epsilon_i = g(e_i, e_i)$ und einer Orthonormalbasis $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$. Nach der Gauß-Formel ergibt dies:

$$ric(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^n \epsilon_i g(g(e_i, e_i)\vec{X} - g(X, e_i)e_i, \vec{Y})$$

$$ric(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{r^2} \sum_{i=0}^n \epsilon_i^2 g(\vec{X}, \vec{Y}) - g(\vec{X}, e_i)g(e_i, \vec{Y})$$

$$ric(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{1}{r^2}(n g(\vec{X}, \vec{Y}) - g(\vec{X}, \vec{Y})) = \frac{n-1}{r^2} g(\vec{X}, \vec{Y})$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Daraus erhält man für den Ricci-Tensor, dass dieser ein Vielfaches des metrischen Tensors ist:

$$R_{ij} = \frac{n-1}{r^2} g_{ij} \quad .$$

Der Ricci-Skalar ist dann durch

$$R = \frac{n(n-1)}{r^2}$$

gegeben.

Die kosmologische Konstante erfüllt die Gleichung: $R = \frac{2n}{n-2} \Lambda$. Hierbei steht das Symbol R für den Ricci-Skalar. Man erhält:

$$\frac{n(n-1)}{r^2} = \frac{2n}{n-2} \Lambda$$

und damit

$$\Lambda = \frac{(n-1)(n-2)}{2r^2} \quad .$$

Der Anti-De-Sitter-Raum wird durch die Hyperfläche der Abbildung:

$$f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow R: x \mapsto -x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{induziert:}$$

$$H_1^n(r) = f^{-1}(-r^2)$$

Der Anti-De-Sitter-Raum ist diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$. Der Diffeomorphismus ist durch:

$$\Phi_r(x_0, x_1, \hat{x}) = \left(\frac{x_0}{\sqrt{r^2 + |(\hat{x})|^2}}, \frac{x_1}{\sqrt{r^2 + |(\hat{x})|^2}}, \hat{x} \right)$$

$$\Phi_r^{-1}(y_0, y_1, \hat{y}) = (y_0 \sqrt{r^2 + |(\hat{y})|^2}, y_1 \sqrt{r^2 + |(\hat{y})|^2}, \hat{y})$$

gegeben. Der Gradient ist derselbe wie beim De-Sitter-Raum. Bezüglich des metrischen Tensors g, mit $\text{diag}(g) = \{-1, -1, 1, \dots, 1\}$ gilt:

$$g(\text{grad}(f), \text{grad}(f)) = -4r^2 \quad \text{mit} \quad \text{grad} = g \cdot \nabla \quad .$$

Dadurch ändern sich die Krümmungen, die wie beim De-Sitter-Raum berechnet werden:

$$K(H_1^n) = -\frac{1}{r^2}$$

$$R_{ij} = -\frac{n-1}{r^2} g_{ij}$$

$$R = -\frac{n(n-1)}{r^2}$$

Der Anti-De-Sitter-Raum hat besondere physikalische Eigenschaften. Jedes Objekt, das man weg wirft, kehrt wieder zurück. Die Zeit bis zur Rückkehr ist nicht von der Stärke des Wurfs abhängig. Das Objekt entfernt sich desto weiter, je kräftiger man es weg wirft, aber es kehrt stets nach der gleichen Zeit zurück. Licht entfernt sich unendlich weit, kehrt aber wieder nach endlicher Zeit zurück. Der Grund für dieses seltsame Phänomen ist eine Zeitkontraktion, die mit der Entfernung vom Beobachter zunimmt.

Der Anti-De-Sitter-Raum (AdS) spielt eine wesentliche Rolle in der holografischen Theorie. Sie geht davon aus, dass es zu allen Zuständen in einem Raum-Zeit-Gebiet eine äquivalente Beschreibung auf dem Rand dieses Gebietes gibt. Dies bedeutet aber auch, dass der Informationsgehalt – alle mögliche Anordnung von Teilchen und deren Feldern – bei der Gravitation keine lokale Größe ist, weil dieser dann proportional zum Volumen eines Gebietes wäre.

Für die Theorie spricht die Entropie Schwarzer Löcher. Das Flächenmaß des Ereignishorizontes, der durch den Schwarzschildradius gebildet wird, ist ein direktes Maß für die Entropie Schwarzer Löcher. Ein Schwarzes Loch ist eine Obergrenze für die Materiekonzentration in einem Raumgebiet und damit auch die Obergrenze für die Entropie in einem Raumvolumen.

Ein besonders wichtiger Aspekt des Anti-De-Sitter-Raums liegt in der Korrespondenzvermutung zwischen AdS und CFT – Conformal Field Theory. Unter einer Korrespondenz versteht man in der Mathematik zwei Theorien, die dieselben Phänomene beschreiben. Sie werden meistens durch Kategorien beschrieben und entsprechenden Abbildungen zwischen den Kategorien, die man Funktoren nennt. Was in der einen Theorie schwer zu beweisen ist, kann in der anderen Theorie leicht bewiesen werden. Wichtige Theorien und Funktoren zwischen den Theorien liegen in der algebraischen Topologie vor. Der Fields-Medaillen Preisträger Peter Scholze versucht, über sogenannte perfektoide Räume Zahlentheoretische Probleme zu lösen.

5.6 Das Gödel-Universum oder die Reise in die Vergangenheit⁴⁷

5.6.1 Die Metrik

Das Linienelement im Gödel-Universum ist gegeben durch:

$$ds^2 = a^2 \left(dt^2 - dx^2 + \frac{e^{2x}}{2} dy^2 - dz^2 + 2e^x dt dy \right) \quad ^{48}.$$

Für die folgenden Rechnungen wurde das Programm Sage benutzt. Es handelt sich dabei um die Open-Source Version des Mathematikprogramms Maple, das man kostenpflichtig erwerben kann.

Das entsprechende Handbuch für Sage findet man unter:

<https://doc.sagemath.org/html/en/reference/index.html>

Entsprechende Beispiele sind unter:

https://nbviewer.jupyter.org/github/sagemanifolds/SageManifolds/blob/master/Worksheets/v1.3/SM_Friedmann_equations.ipynb

zu finden. Hier wurden die Berechnungen von Kapitel 5.4 mit Sage durchgeführt.

```
version()
'SageMath version 8.4, Release Date: 2018-10-17'
M = Manifold(4, 'M', structure='Lorentzian')
fr.<t,x,y,z> = M.chart(r't x y z')
var('a c Lambda', domain='real')
g=M.metric()
g[0,0]=a^2; g[1,1]=-a^2; g[2,2]=a^2*exp(2*x)/2; g[3,3]=-a^2;
g[0,2]=a^2*exp(x); g[2,0]=a^2*exp(x)
latex (g[:])
```

$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 & a^2 e^x & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 & 0 \\ a^2 e^x & 0 & \frac{1}{2} a^2 e^{(2x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2 \end{pmatrix}$$

```
h=g.inverse()
latex(h[:])
```

⁴⁷ <https://www.wissenschaft.de/geschichte-archaeologie/ein-ganzes-universum-als-zeitmaschine/>

⁴⁸ REVIEWS OF MODERN PHYSICS VOLUME 21, NUMBER 3 JULY, 1949

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{a^2} & 0 & \frac{2e^{(-x)}}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ \frac{2e^{(-x)}}{a^2} & 0 & -\frac{2e^{(-2x)}}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a^2} \end{pmatrix}$$

```
nabla = g.connection()
latex (g.christoffel_symbols_display())
```

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tx} &= 1 \\ \Gamma^t_{xy} &= \frac{1}{2} e^x \\ \Gamma^x_{ty} &= \frac{1}{2} e^x \\ \Gamma^x_{yy} &= \frac{1}{2} e^{(2x)} \\ \Gamma^y_{tx} &= -e^{(-x)} \end{aligned}$$

```
Ricci = nabla.ricci()
latex (Ricci[:])
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^x & 0 & e^{(2x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
Ricci_scalar = g.ricci_scalar()
latex(Ricci_scalar.display())
```

$$\begin{aligned} r(g): M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, x, y, z) &\longmapsto \frac{1}{a^2} \end{aligned}$$

Der kontravariante Vektor $\vec{e}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \\ a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat bezüglich der Metrik die Länge 1.

Seine kovarianten Komponenten sind: $g_{ij} \cdot a^j = (a, 0, a e^x, 0) = \vec{u}$.

$$\text{Es gilt: } \vec{u} \otimes \vec{u} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a^2 e^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a^2 e^x & 0 & a^2 e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & e^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^x & 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^2 R_{ij} \text{ .}$$

Damit lässt sich die linke Seite der einsteinschen Feldgleichung wie folgt schreiben:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} R \cdot g_{ij} = \frac{1}{a^2} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} - \frac{1}{2a^2} \cdot g_{ij} \text{ .}$$

Zusammen mit der rechten Seite der einsteinschen Feldgleichung liefert das, wenn man $c = 1$ setzt:

$$\frac{1}{a^2} \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} - \frac{1}{2a^2} \cdot g_{ij} = 8 \cdot \pi G \rho \cdot \vec{u} \otimes \vec{u} + \Lambda \cdot g_{ij}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man die Lösung mit:

$$\frac{1}{a^2} = 8 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho$$

und

$$\Lambda = -4 \cdot \pi \cdot G \cdot \rho$$

5.6.2 Rotationssymmetrie

$$ds^2 = a^2(dx_0^2 - dx_1^2 + \frac{e^{2x_1}}{2} dx_2^2 - dx_3^2 + 2e^{x_1} dx_0 dx_2) \quad \text{oder} \quad ds^2 = a^2[(dx_0 + e^{x_1} dx_2)^2 - dx_1^2 - \frac{e^{2x_1}}{2} dx_2^2 - dx_3^2]$$

Umwandlung der Metrik in eine rotationsfreie Metrik:

Man benutzt folgende Formeln⁴⁹ zur Koordinatentransformation in Polarkoordinaten:

- $e^{x_1} = \cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r$
- $x_2 e^{x_1} = \sqrt{2} \sin \varphi \sinh 2r$
- $\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-2r} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \quad \text{mit} \quad \left|\frac{\varphi}{2} + \frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}}\right| < \frac{\pi}{2}$
- $x_3 = 2z$

Mittels dieser Transformationen soll das Linienelement

$$ds^2 = a^2[(dx_0 + e^{x_1} dx_2)^2 - dx_1^2 - \frac{e^{2x_1}}{2} dx_2^2 - dx_3^2]$$

in ein Linienelement umgewandelt werden, das keine Funktion von φ enthält, also nur von Funktionen in r abhängt. Wir berechnen zuerst den Ausdruck $dx_1^2 + \frac{e^{2x_1}}{2} dx_2^2$:

$$e^{x_1} dx_1 = 2 \sinh 2r dr - \sin \varphi \sinh 2r d\varphi + 2 \cos \varphi \cosh 2r dr$$

$$e^{x_1} dx_2 + x_2 e^{x_1} dx_1 = \sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r d\varphi + 2\sqrt{2} \sin \varphi \cosh 2r dr$$

$$e^{x_1} dx_2 = \sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r d\varphi + 2\sqrt{2} \sin \varphi \cosh 2r dr - x_2 e^{x_1} dx_1$$

$$e^{x_1} dx_2 = \sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r d\varphi + 2\sqrt{2} \sin \varphi \cosh 2r dr - x_2 (2 \sinh 2r dr - \sin \varphi \sinh 2r d\varphi + 2 \cos \varphi \cosh 2r dr)$$

$$x_2 = x_2 e^{x_1} e^{-x_1} = e^{-x_1} \sqrt{2} \sin \varphi \sinh 2r$$

$$e^{x_1} dx_2 = \sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r d\varphi + 2\sqrt{2} \sin \varphi \cosh 2r dr - e^{-x_1} \sqrt{2} \sin \varphi \sinh 2r (2 \sinh 2r dr - \sin \varphi \sinh 2r d\varphi + 2 \cos \varphi \cosh 2r dr)$$

$$e^{2x_1} dx_2 = e^{x_1} (\sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r d\varphi + 2\sqrt{2} \sin \varphi \cosh 2r dr) - \sqrt{2} \sin \varphi \sinh 2r (2 \sinh 2r dr - \sin \varphi \sinh 2r d\varphi + 2 \cos \varphi \cosh 2r dr)$$

$$e^{2x_1} dx_2 = (\cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r) (\sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r d\varphi + 2\sqrt{2} \sin \varphi \cosh 2r dr) - \sqrt{2} \sin \varphi \sinh 2r (2 \sinh 2r dr - \sin \varphi \sinh 2r d\varphi + 2 \cos \varphi \cosh 2r dr)$$

⁴⁹ <https://journals.aps.org/rmp/abstract/10.1103/RevModPhys.21.447>

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$e^{2x_1} dx_2 = \sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r d\varphi + \sqrt{2} \cos^2 \varphi \sinh^2 2r dr + \sqrt{2} \sin^2 \varphi \sinh^2 2r d\varphi + \dots$$

$$\dots + 2\sqrt{2} \sin \varphi \cosh^2 2r dr + 2\sqrt{2} \cos \varphi \sin \varphi \cosh 2r \sinh 2r dr \dots$$

$$\dots - 2\sqrt{2} \sin \varphi \sinh^2 2r dr - 2\sqrt{2} \cos \varphi \sin \varphi \sinh 2r \cosh 2r dr$$

$$e^{2x_1} dx_2 = \sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r d\varphi + 2\sqrt{2} \sin \varphi dr + \sqrt{2} \sinh^2 2r d\varphi$$

$$e^{4x_1} dx_2^2 = (\sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r d\varphi + 2\sqrt{2} \sin \varphi dr + \sqrt{2} \sinh^2 2r d\varphi)^2$$

$$e^{4x_1} dx_2^2 = 2 \cos^2 \varphi \sinh^2 2r \cosh^2 2r d\varphi^2 + 8 \sin^2 \varphi dr^2 + 2 \sinh^4 2r d\varphi^2 + 8 \cos \varphi \sin \varphi \sinh 2r \cosh 2r dr d\varphi + \dots$$

$$\dots + 4 \cos \varphi \sinh^3 2r \cosh 2r d\varphi^2 + 8 \sin \varphi \sinh^2 2r dr d\varphi$$

$$e^{2x_1} dx_1^2 = (2 \sinh 2r dr - \sin \varphi \sinh 2r d\varphi + 2 \cos \varphi \cosh 2r dr)^2$$

$$e^{2x_1} dx_1^2 = 4 \sinh^2 2r dr^2 + \sin^2 \varphi \sinh^2 2r d\varphi^2 + 4 \cos^2 \varphi \cosh^2 2r dr^2 + \dots$$

$$\dots - 4 \sin \varphi \sinh^2 2r dr d\varphi + 8 \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r dr^2 - 4 \sin \varphi \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r dr d\varphi$$

$$e^{2x_1} dx_1^2 + \frac{1}{2} e^{4x_1} dx_2^2 = (4 \sinh^2 2r + 4 \cos^2 \varphi \cosh^2 2r + 8 \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r + 4 \sin^2 \varphi) dr^2 + \dots$$

$$\dots + (\sinh^4 2r + \cos^2 \varphi \sinh^2 2r \cosh^2 2r + 2 \cos \varphi \sinh^3 2r \cosh 2r + \sin^2 \varphi \sinh^2 2r) d\varphi^2$$

$$e^{2x_1} dx_1^2 + \frac{1}{2} e^{4x_1} dx_2^2 = 4 (\sinh^2 2r + \cos^2 \varphi \cosh^2 2r + 2 \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r + \sin^2 \varphi) dr^2 + \dots$$

$$\dots + \sinh^2 2r (\sinh^2 2r + \cos^2 \varphi 2r \cosh^2 2r + 2 \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r + \sin^2 \varphi) d\varphi^2$$

$$e^{x_1} = \cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r \quad e^{2x_1} = (\cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r)^2$$

$$e^{2x_1} = \cosh^2 2r + 2 \cos \varphi \cosh 2r \sinh 2r + \cos^2 \varphi \sinh^2 2r$$

$$e^{2x_1} = 1 + \sinh^2 2r + 2 \cos \varphi \cosh 2r \sinh 2r + \cos^2 \varphi (\cosh^2 2r - 1)$$

$$e^{2x_1} = 1 - \cos^2 \varphi + \sinh^2 2r + 2 \cos \varphi \cosh 2r \sinh 2r + \cos^2 \varphi \cosh^2 2r$$

$$e^{2x_1} = \sinh^2 2r + \cos^2 \varphi \cosh^2 2r + 2 \cos \varphi \cosh 2r \sinh 2r + \sin^2 \varphi$$

$$dx_1^2 + \frac{1}{2} e^{2x_1} dx_2^2 = 4 dr^2 + \sinh^2 2r d\varphi^2$$

$$dx_1^2 + \frac{1}{2} e^{2x_1} dx_2^2 = 4 dr^2 + 4 \sinh^2 r \cosh^2 r d\varphi^2$$

Wir berechnen nun den zweiten Term im Linienelement der Gödel-Metrik: $dx_0 + e^{x_1} dx_2$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Dazu benötigen wir $\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-2r} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ zur Umrechnung in dt:

Mit der Kettenregel erhält man:

$$\left[1 + \tan^2\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}}\right)\right] \cdot \left(\frac{d\varphi}{2} + \frac{dx_0 - 2dt}{2\sqrt{2}}\right) = -2e^{-2r} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) dr + e^{-2r} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \cdot \frac{d\varphi}{2}$$

$$\left[1 + e^{-4r} \cdot \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \cdot \left(\frac{d\varphi}{2} + \frac{dx_0 - 2dt}{2\sqrt{2}}\right) = -2e^{-2r} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) dr + e^{-2r} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \cdot \frac{d\varphi}{2}$$

Multipliziert man mit e^{2r} , so erhält man:

$$\left[e^{2r} + e^{-2r} \cdot \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \cdot \left(\frac{d\varphi}{2} + \frac{dx_0 - 2dt}{2\sqrt{2}}\right) = -2 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) dr + \left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \cdot \frac{d\varphi}{2}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{2} + \frac{dx_0 - 2dt}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{-2 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) dr + \left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \cdot \frac{d\varphi}{2}}{e^{2r} + e^{-2r} \cdot \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

$$\left(\frac{dx_0 - 2dt}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{-2 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) dr + \left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \cdot \frac{d\varphi}{2}}{e^{2r} + e^{-2r} \cdot \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} - \frac{d\varphi}{2}$$

$$dx_0 - 2dt = \frac{-4\sqrt{2} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) dr + \sqrt{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \cdot d\varphi}{e^{2r} + e^{-2r} \cdot \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} - \sqrt{2} d\varphi$$

$$dx_0 = \frac{-4\sqrt{2} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) dr + \sqrt{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right) \cdot d\varphi}{e^{2r} + e^{-2r} \cdot \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} - \sqrt{2} d\varphi + 2dt$$

$$e^{2r} = \cosh 2r + \sinh 2r \quad e^{-2r} = \cosh 2r - \sinh 2r$$

$$e^{2r} + e^{-2r} \cdot \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \cosh 2r + \sinh 2r + (\cosh 2r - \sinh 2r) \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\left[\cosh 2r + \sinh 2r + (\cosh 2r - \sinh 2r) \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cosh 2r + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sinh 2r + \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cosh 2r - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sinh 2r$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$[\cosh 2r + \sinh 2r + (\cosh 2r - \sinh 2r) \tan^2(\frac{\varphi}{2})] \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \cosh 2r + (\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}) \sinh 2r$$

$$[\cosh 2r + \sinh 2r + (\cosh 2r - \sinh 2r) \tan^2(\frac{\varphi}{2})] \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r$$

$$[\cosh 2r + \sinh 2r + (\cosh 2r - \sinh 2r) \tan^2(\frac{\varphi}{2})] \cos^2 \frac{\varphi}{2} = e^{x_1}$$

$$e^{2r} + e^{-2r} \cdot \tan^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{e^{x_1}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

Dies liefert für dx_0 :

$$dx_0 = \frac{[-4\sqrt{2} \tan(\frac{\varphi}{2}) dr + \sqrt{2}(1 + \tan^2(\frac{\varphi}{2})) \cdot d\varphi] \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{e^{x_1}} - \sqrt{2} d\varphi + 2 dt$$

Multipliziert mit e^{x_1} ergibt dies:

$$e^{x_1} dx_0 = [-4\sqrt{2} \sin(\frac{\varphi}{2}) \cos(\frac{\varphi}{2}) dr + \sqrt{2}(\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2(\frac{\varphi}{2})) \cdot d\varphi] - e^{x_1}(\sqrt{2} d\varphi + 2 dt)$$

$$e^{x_1} dx_0 = -2\sqrt{2} \sin \varphi dr + \sqrt{2} \cdot d\varphi - e^{x_1}(\sqrt{2} d\varphi + 2 dt)$$

Mit $e^{x_1} = \cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r$ liefert das:

$$e^{x_1} dx_0 = -2\sqrt{2} \sin \varphi dr + \sqrt{2} \cdot d\varphi - (\cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r)(\sqrt{2} d\varphi + 2 dt)$$

Wir hatten schon $e^{2x_1} dx_2 = \sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r d\varphi + 2\sqrt{2} \sin \varphi dr + \sqrt{2} \sinh^2 2r d\varphi$ hergeleitet.

Dies liefert dann

$$e^{x_1} dx_0 + e^{2x_1} dx_2 = \sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r d\varphi + \sqrt{2} \sinh^2 2r d\varphi + \sqrt{2} \cdot d\varphi - (\cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r)(\sqrt{2} d\varphi + 2 dt)$$

$$e^{x_1} dx_0 + e^{2x_1} dx_2 = \sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r d\varphi + \sqrt{2}(\cosh^2 2r - 1) d\varphi + \sqrt{2} \cdot d\varphi - (\cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r)(\sqrt{2} d\varphi + 2 dt)$$

$$e^{x_1} dx_0 + e^{2x_1} dx_2 = \sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r \cosh 2r d\varphi + \sqrt{2} \cosh^2 2r d\varphi - (\cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r)(\sqrt{2} d\varphi + 2 dt)$$

$$e^{x_1} dx_0 + e^{2x_1} dx_2 = (\sqrt{2} \cos \varphi \sinh 2r + \sqrt{2} \cosh 2r) \cosh 2r d\varphi - (\cosh 2r + \cos \varphi \sinh 2r)(\sqrt{2} d\varphi + 2 dt)$$

$$e^{x_1} dx_0 + e^{2x_1} dx_2 = \sqrt{2} e^{x_1} \cosh 2r d\varphi - e^{x_1}(\sqrt{2} d\varphi + 2 dt)$$

$$dx_0 + e^{2x_1} dx_2 = \sqrt{2} \cosh 2r d\varphi - (\sqrt{2} d\varphi + 2 dt) = \sqrt{2}(\cosh 2r - 1) d\varphi - 2 dt$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

$$(dx_0 + e^{2x_1} dx_2)^2 = (\sqrt{2}(\cosh 2r - 1) d\varphi - 2dt)^2$$

$$(dx_0 + e^{2x_1} dx_2)^2 = 4dt^2 + 2(\cosh 2r - 1)^2 d\varphi^2 + 4\sqrt{2}(\cosh 2r - 1) dt d\varphi$$

Mit der Beziehung: $\cosh 2r - 1 = 2\sinh^2 r$ erhält man:

$$(dx_0 + e^{2x_1} dx_2)^2 = 4dt^2 + 8\sinh^4 r d\varphi^2 + 8\sqrt{2}\sinh^2 r dt d\varphi$$

und

$$dx_1^2 + \frac{1}{2}e^{2x_1} dx_2^2 = 4dr^2 + 4\sinh^2 r \cosh^2 r d\varphi^2$$

Damit transformiert sich das Linienelement $ds^2 = a^2 [(dx_0 + e^{x_1} dx_2)^2 - dx_1^2 - \frac{e^{2x_1}}{2} dx_2^2 - dx_3^2]$ zu

$$ds^2 = a^2 \cdot (4dt^2 + 4\sinh^4 r d\varphi^2 + 8\sqrt{2}\sinh^2 r dt d\varphi - 4dr^2 - 4\sinh^2 r \cosh^2 r d\varphi^2 - dz^2)$$

$$ds^2 = 4a^2 \cdot (dt^2 - dr^2 - dz^2 + 2\sinh^4 r d\varphi^2 - \sinh^2 r \cosh^2 r d\varphi^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 r dt d\varphi)$$

$$ds^2 = 4a^2 \cdot (dt^2 - dr^2 - dz^2 + 2\sinh^4 r d\varphi^2 - \sinh^2 r (1 + \sinh^2 r) d\varphi^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 r dt d\varphi)$$

$$ds^2 = 4a^2 \cdot (dt^2 - dr^2 - dz^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\varphi^2 + 2\sqrt{2}\sinh^2 r dt d\varphi)$$

Damit ist gezeigt, dass das Gödel-Universum rotationssymmetrisch ist. Für $r \geq \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0,88$ wird $\sinh r \geq 1$. Betrachte man für solche r den Kreis mit $r = \text{konstant}$, $z = 0$, $t = -\alpha\varphi$ mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, so erhält man: $ds^2 = 4a^2 \cdot (\alpha^2 d\varphi^2 + (\sinh^4 r - \sinh^2 r) d\varphi^2 - 2\alpha\sqrt{2}\sinh^2 r d\varphi)$ oder $ds^2 = 4a^2 \cdot (\alpha^2 + \sinh^4 r - (1 + 2\alpha\sqrt{2})\sinh^2 r) d\varphi^2$. Ist $\alpha \geq 0$, dann sind für solche r alle Punkte auf dem Weg zeitartig.

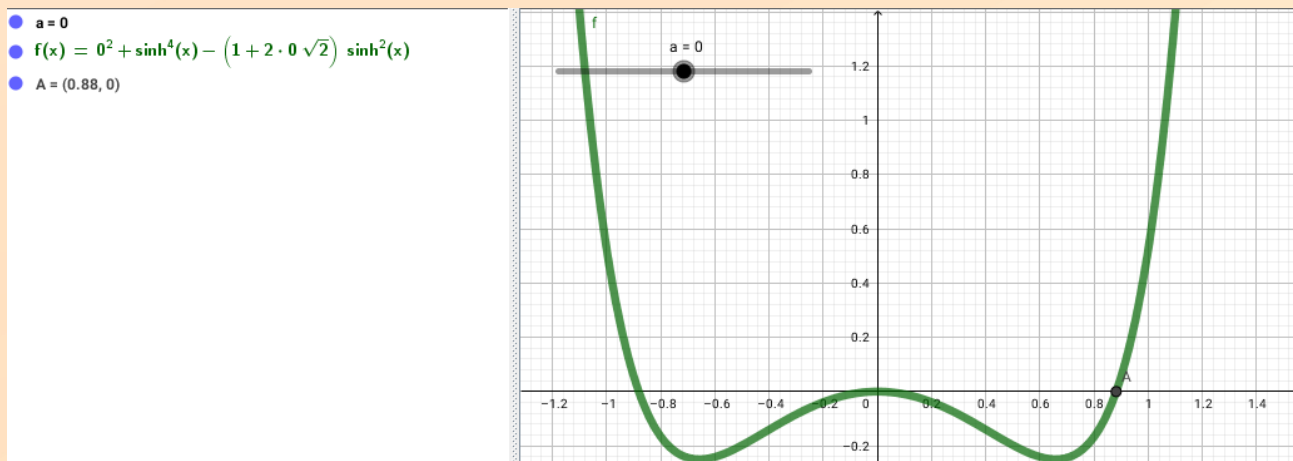


Abb 5.5.2.2 $ds^2 < 0$ für $4a^2 = 1$ und $\alpha = 0$ in gewissen Bereichen

Damit wird aber jeder Punkt im Gödel-Universum auf diesem Kreis in einen Punkt transformiert, dessen Zeitkoordinate $t = -2\pi\alpha$ vor der Ausgangszeit $t=0$ ist, falls $\alpha > 0$ ist. Dies zeigt, dass es Wege im Gödel-Universum gibt, die zurück in die Vergangenheit führen. Das Gödel-Universum ist also nicht kausal und entspricht damit nicht dem physikalischen Zeitpfeil, der keine Rückrichtung aufweist, weil die Entropie im Universum stetig zunimmt.

5.7 Schwache Gravitationswellen

5.7.1 Einführung

Die schwachen Gravitationswellen sollen mit folgender Überlegung motiviert werden. Dazu stellt man sich einen Beobachter A im Koordinatenursprung eines frei fallenden Koordinatensystem vor. Dann sind alle physikalischen Messungen in einem Minkowskiraum mit Koordinaten $\{x^0, x^1, x^2, x^3\} = \{t, x, y, z\}$ beschreibbar. Es stellt sich die Frage, ob die einsteinschen Feldgleichungen auch kleine Störungen dieser Minkowskimetrik erlauben, sodass die Weltlinie eines Probeteilchens D für den Beobachter eine Schwingung ist. Wir gehen davon aus, dass die Amplitude dieser Schwingung eine Größenordnung von $< 10^{-17}$, sodass die Kräuselung der Raumzeit sehr schwer messbar ist und die Quadrate dieser Größen für die physikalische Messung keine Rolle mehr spielen, weil sie unterhalb der Plancklänge liegen.

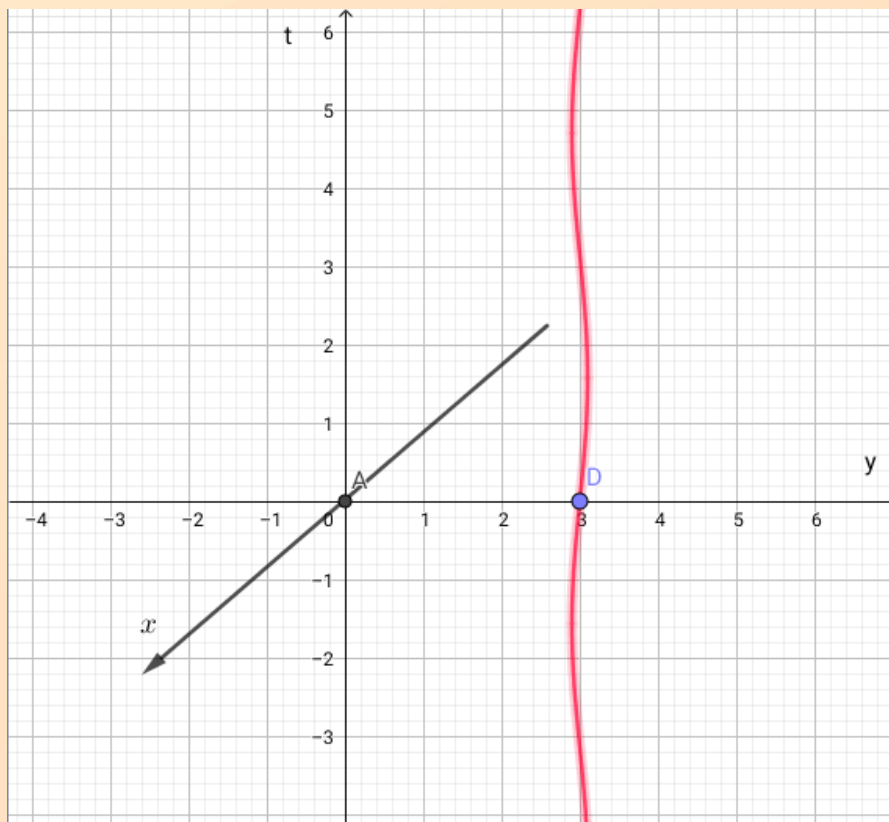


Abbildung: Kräuselung der Raumzeit durch schwache Gravitationswellen

Die folgende Abbildung soll dieses Verhalten illustrieren. Eine schwache Gravitationswelle, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, kräuselt die Raumzeit des Probeteilchens in D. Der Beobachter A wird dies als Änderung der Position des Teilchens auf der x-Achse bemerken, in dem er in x-Richtung unterschiedliche Abstände des Probeteilchens misst.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie beschreibt die geodätische Abweichung das Verhalten des Probeteilchens D. Die geodätische Abweichung beschreibt die Tendenz von Objekten sich zu nähern oder zu entfernen während sie sich unter dem Einfluss eines sich räumlich veränderlichen Gravitationsfeldes bewegen.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Die dabei auftretenden Kräfte werden durch den Riemannschen Krümmungstensor beschrieben. Die Bewegungsbahn eines Objektes, das sich nur unter dem Einfluss der Gravitation bewegt, ist eine Geodäte, sodass man eine Verbindung zwischen dem Riemannschen Krümmungstensor und der relativen Beschleunigung zweier benachbarter Geodäten hat.

Man betrachtet eine Menge von Geodäten, die durch einen stetigen Parameter s indiziert sind und mit einem affinen Parameter t parametrisiert sind. In der allgemeinen Relativitätstheorie ist t die Eigenzeit des sich bewegenden Objektes. Der Tangentialvektor an eine Geodäte $\gamma_s(t)$ ist dann

durch $T^i = \frac{\partial x^i(s,t)}{\partial t}$ gegeben. Dies entspricht der Geschwindigkeit des Objektes, das sich entlang

der Geodäte bewegt. Zusätzlich definiert man über $X^i = \frac{\partial x^i(s,t)}{\partial s}$ einen Abweichungsvektor, der die Entfernung der beiden Objekte angibt, die sich in infinitesimalen Abständen zueinander auf ihren Geodäten bewegen.

Nimmt man nun die zweite kovariante Richtungsableitung entlang des Tangentenvektors T , so erhält man die Beschleunigung zu:

$$A^i = R^i_{\ jkl} T^j T^k X^l .$$

Setzt man voraus, dass sich die Objekte A und D im Minkowskiraum nur sehr langsam bewegen, dann ist der Tangentenvektor T ungefähr $(1,0,0,0)$. Daraus erhält man:

$A^i = R^i_{\ 00l} X^l = -R^i_{\ 010} X^l$ mit $i, l = 1, 2, 3$. Die Beschleunigung des Teilchens D ist aber die 2. zeitliche Ableitung der Abweichungen $\Delta x^i = \delta x^i$. Deshalb erhält man: $A^i = \frac{\partial \Delta x^i}{\partial t^2}$. Setzt man

nun $R^i_{\ 010} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{il}^{TT}}{\partial t^2}$, so hat man ein Gravitationsfeld, und dies liefert für die Beschleunigung in

diesem Feld: $\frac{\partial \Delta x^i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{il}^{TT}}{\partial t^2} x^l$ und durch Integration $\Delta x^i = \frac{1}{2} h_{il}^{TT} x^l$. Dabei sind die x^i die ungestörten Koordinaten von Punkt D, d. h. die Koordinaten von D in Abwesenheit der schwachen GW.

Die Anfangsbedingung, die der Integration zugrunde liegen, sind, dass die beiden Objekte A und D in Ruhe sind, bevor die Gravitationswelle ankommt. Die Formel gibt dann an, wie die Koordinaten durch die GW gestört werden. Da die Gravitationswelle sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet und wir im Folgenden davon ausgehen, dass sie die x - y -Ebene in z -Richtung durchläuft (transverse), können wir davon ausgehen, dass diese Koordinaten nicht gestört werden.

Damit kann man den Metrikstensor der Störungen wie folgt beschreiben:

$$h_{ij}^{TT} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{xx}^{TT} & h_{xy}^{TT} & 0 \\ 0 & h_{yx}^{TT} & h_{yy}^{TT} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ in } \{t, x, y, z\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3\}.$$

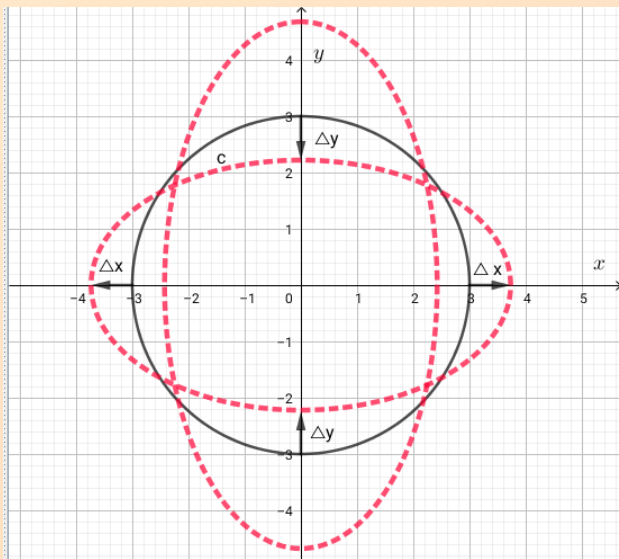
Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Die Störungen entlang der x- und y-Koordinatenlinie sind dann:

$$\Delta x = \frac{1}{2} h_{xx}^{TT} x, \quad \Delta y = -\frac{1}{2} h_{yy}^{TT} y, \quad \Delta x = \frac{1}{2} h_{xy}^{TT} y \quad \text{und} \quad \Delta y = \frac{1}{2} h_{yx}^{TT} x.$$

Das Gravitationsfeld, das dem Vorgang zugrunde liegt, ist dann durch: $\frac{f^i}{m} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{il}^{TT}}{\partial t^2} x^i$ gegeben. Weil das Gravitationsfeld Divergenz 0 hat, erhält man $h_{ii}^{TT} = 0$, d. h.: die Metrik ist traceless, und dies liefert: $h_{xx}^{TT} = -h_{yy}^{TT}$ und $h_{xy}^{TT} = h_{yx}^{TT}$ wegen der Symmetrie des Metriktensors. Man setzt $h_{xx}^{TT} = h_+$ und $h_{xy}^{TT} = h_\times$. Damit lautet der Metriktensor für die Störungen:

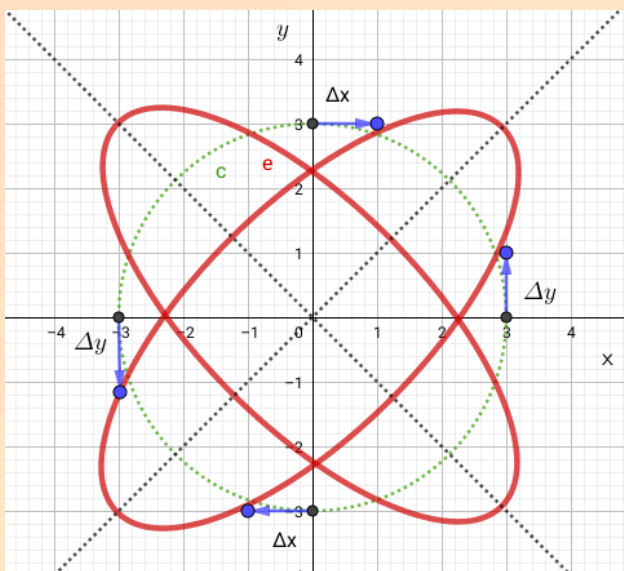
$$h_{ij}^{TT} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Die Abbildung zeigt die Änderung der Raumzeit durch das Eintreffen einer schwachen Gravitationswelle in der Beobachterebene:

$$\Delta x = \frac{1}{2} h_+ x \quad \text{und} \quad \Delta y = -\frac{1}{2} h_+ y.$$

Der Kreis, auf dem die Probeteilchen ohne GW liegen, wird in Ellipsen deformiert. Dreht man die Ellipsen um 180° , so gehen die Ellipsen in sich selbst über. D.h.: Bei einer Rotation um 360° hat man zwei Selbstabbildungen der Ellipse. Dies bedeutet, dass das theoretische quantenmechanische Teilchen, das die Gravitationswellen erzeugt, den Spin 2 hat.



Diese Darstellung erhält man aus $\Delta x = \frac{1}{2} h_\times y$ und $\Delta y = \frac{1}{2} h_\times x$. Es handelt sich um 45° gedrehte Ellipsen. Die beiden Darstellung sind der Polarisation der Gravitationswellen zugeordnet.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Wir gehen wieder von der Situation aus, dass der Beobachter im freien Fall ist und deshalb seine Messungen im Minkowskiraum durchführt. Das Teilchen, das er beobachtet, während die GW seine x-y-Ebene in z-Richtung mit Lichtgeschwindigkeit durchläuft, befindet sich auf der x-Achse und hat die x-Koordinate L. Wir gehen davon aus, dass die GW die Metrik des Minkowskiraums

minimal stört: $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}^{TT} + O((h^{TT})^2)$. Dann erhalten wir: $g_{ij} = \eta_{ij} + O\left(\frac{|(x)|^2}{R^2}\right)$ mit

$|R_{ijkl}| \sim \frac{1}{R^2}$, d. h. die Abweichungen von der Minkowskimetrik sind sehr klein.

$\frac{1}{R^2} \sim |R_{i0k0}| = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h_{ik}^{TT}}{\partial t^2} x^i \sim \frac{h_+}{\lambda^2}$ mit $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{2\pi}$. Wenn die Wellenlänge der GW viel größer ist als

der Abstand L des Probeteilchens auf der x-Achse, dann erhält man: $g_{ij} = \eta_{ij} + O\left(h_+ \frac{|(L)|^2}{\lambda^2}\right)$ mit

$h_+ \frac{|(L)|^2}{\lambda^2} \ll h_+$. Dies liefert dann eine Korrektur der Messung $\Delta x = \frac{1}{2} h_+ x$ von $h_+ \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2$. Hat

man also einen sehr kleinen Abstand des Probeteilchens zum Beobachter verglichen mit der Wellenlänge der GW, dann kann man mit den Formeln aus 5.1 arbeiten und so tun, als hätte die GW nur auf das Probeteilchen D einen Einfluss, nicht aber auf den Beobachter A.

5.7.2 Herleitung

Man betrachtet eine gestörte Minkowskimetrik $g_{ij} = \eta_{ij} + f_{ij}$. Dabei ist η_{ij} die Minkowskimetrik bezüglich $\{t, x, y, z\} = \{x^1, x^2, x^3, x^4\}$ und $f_{ij} \ll 1$ die entsprechende Störung, sodass Produkte der f_{ij} vernachlässigt werden können, weil sie unterhalb einer physikalischen Nachweisbarkeitsgrenze liegen, z. B. die Plancklängen.

Die inverse Matrix zu g_{ij} ist g^{ij} . Wenn man die quadratischen Terme der f_{ij} vernachlässigt, dann kann man $g^{ij} = \eta^{ij} - f^{ij}$ nehmen. Es gilt:

$(\eta_{ij} + f_{ij}) \cdot (\eta^{ji} - f^{ji}) = \eta_{ij} \cdot \eta^{ji} + f_{ij} \cdot \eta^{ji} - \eta_{ij} \cdot f^{ji} - f_{ij} \cdot f^{ji}$. Der letzte Term $-f_{ij} \cdot f^{ji}$ kann vernachlässigt werden. Man erhält also:

$$(\eta_{ij} + f_{ij}) \cdot (\eta^{ji} - f^{ji}) \approx \eta_{ij} \cdot \eta^{ji} + f_{ij} \cdot \eta^{ji} - \eta_{ij} \cdot f^{ji} = E + f_{ij} \cdot \eta^{ji} - \eta_{ij} \cdot f^{ji} \text{ mit der Einheitsmatrix } E.$$

Setzt man für f^{ij} die Matrix $f_{ij} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{34} \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{44} \end{pmatrix}$ ein, so erhält man für den Kommutator, da

$$\eta^{ji} \text{ zu sich selbst invers ist } f_{ij} \cdot \eta^{ji} - \eta_{ij} \cdot f_{ji} = f_{ij} \cdot \eta_{ji} - \eta_{ij} \cdot f_{ji} :$$

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{34} \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{12} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{13} & f_{23} & f_{33} & f_{34} \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \cdot f_{12} & -2 \cdot f_{13} & -2 \cdot f_{14} \\ -2 \cdot f_{12} & 0 & 0 & 0 \\ -2 \cdot f_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -2 \cdot f_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Weil es metrische Tensoren sind, sind die Matrizen symmetrisch, was wir bei der Berechnung

benutzt haben. Setzt man $f_{12} = f_{13} = f_{14} = 0$ erhält man die Matrix: $\begin{pmatrix} f_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ 0 & f_{23} & f_{33} & f_{34} \\ 0 & f_{24} & f_{34} & f_{44} \end{pmatrix}$, die

$$h_{ij}^{TT} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_x & 0 \\ 0 & h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ als Spezialfall enthält und für die der Kommutator}$$

$f_{ij} \cdot \eta^{ji} - \eta_{ij} \cdot f_{ji} = f_{ij} \cdot \eta_{ji} - \eta_{ij} \cdot f_{ji}$ verschwindet. Damit ist $\eta_{ij} - f_{ij}$ invers zu $\eta_{ij} + f_{ij}$, was man bei der Berechnung des Riccitors benutzt.

Bemerkung:

- Setzt man darüber hinaus $h_{ij} = f_{ij} - \frac{1}{2} \cdot \text{trace}(f_{ij}) \cdot \eta_{ij}$, so ist die neue Metrik h_{ij} traceless, d. h. die Spur der Matrix ist 0.
- Setzt man die Komponenten $f_{1i} = 0$ für $i > 1$ gleich 0, so spricht man von einem synchronisierten Bezugssystem, und f_{ij} bzw. f^{ij} sind in diesem Fall identisch.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Die Christoffel-Symbole berechnen sich dann zu:

$$\Gamma_{ik}^m = \frac{1}{2} (\eta^{ms} - f^{ms}) \cdot \left(\frac{\partial g_{si}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^s} \right)$$

Dies vereinfacht sich zu:

$$\Gamma_{ik}^m = \frac{1}{2} \eta^{ms} \cdot \left(\frac{\partial g_{si}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{sk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^s} \right)$$

Daraus kann man den Riemannschen Krümmungstensor berechnen, wenn man die Produkte der Christoffelsymbole vernachlässigt. Man erhält:

$$R_{ikp}^m = \frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial q^p} - \frac{\partial \Gamma_{ip}^m}{\partial q^k}.$$

Für den Riemannschen Krümmungstensor ergibt sich damit:

$$R_{ikp}^m = \frac{1}{2} \cdot \eta^{ms} \left(\frac{\partial^2 f_{si}}{\partial q^k \cdot \partial q^p} + \frac{\partial^2 f_{sk}}{\partial q^i \cdot \partial q^p} - \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial q^s \cdot \partial q^p} - \frac{\partial^2 f_{si}}{\partial q^p \cdot \partial q^k} - \frac{\partial^2 f_{sp}}{\partial q^i \cdot \partial q^k} + \frac{\partial^2 f_{ip}}{\partial q^s \cdot \partial q^k} \right)$$

Da die grünen Terme verschwinden, ergibt sich weiterhin:

$$R_{ikp}^m = \frac{1}{2} \cdot \eta^{ms} \left(\frac{\partial^2 f_{sk}}{\partial q^i \cdot \partial q^p} - \frac{\partial^2 f_{ik}}{\partial q^s \cdot \partial q^p} - \frac{\partial^2 f_{sp}}{\partial q^i \cdot \partial q^k} + \frac{\partial^2 f_{ip}}{\partial q^s \cdot \partial q^k} \right)$$

Durch Tensorverjüngung erhält man den Ricci-Tensor der einsteinschen Feldgleichungen:

$$R_{ip} = R_{imk}^m$$

$$R_{ip} = \frac{1}{2} \cdot \eta^{ms} \left(\frac{\partial^2 f_{sm}}{\partial q^i \cdot \partial q^p} - \frac{\partial^2 f_{im}}{\partial q^s \cdot \partial q^p} - \frac{\partial^2 f_{sp}}{\partial q^i \cdot \partial q^m} + \frac{\partial^2 f_{ip}}{\partial q^m \cdot \partial q^m} \right)$$

Da nur Summen für $s=m$ auftreten, wird $\frac{\partial^2 f_{ip}}{\partial q^s \cdot \partial q^m} = \frac{\partial^2 f_{ip}}{\partial q^m \cdot \partial q^m} = \frac{\partial^2 f_{ip}}{\partial^2 q^m}$. Dann kann man den

Ricci-Tensor auch mit dem d'Alembert-Operator $\square = -\frac{\partial^2}{\partial^2 t} + \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2}{\partial^2 z}$ kürzer schreiben:

$$R_{ip} = \frac{1}{2} \cdot \eta^{mm} \left(\frac{\partial^2 f_{mm}}{\partial q^i \cdot \partial q^p} - \frac{\partial^2 f_{im}}{\partial q^m \cdot \partial q^p} - \frac{\partial^2 f_{mp}}{\partial q^i \cdot \partial q^m} + \square f_{ip} \right) \quad \text{oder}$$

$$R_{ip} = \frac{1}{2} \left(\square f_{ip} + \frac{\partial^2 f_m^m}{\partial q^i \cdot \partial q^p} - \frac{\partial^2 f_i^m}{\partial q^m \cdot \partial q^p} - \frac{\partial^2 f_p^m}{\partial q^i \cdot \partial q^m} \right)$$

Um die Gleichung zu vereinfachen, setzen wir $h_{ij} = f_{ij} - \frac{1}{2} \cdot \text{trace}(f_{ij}) \cdot \eta_{ij}$, dann verschwindet

$$R_{ip} = \frac{\partial^2 h_m^m}{\partial q^i \cdot \partial q^p} = \frac{\partial^2 \text{trace}(h)}{\partial q^i \cdot \partial q^p} \quad \text{und man erhält folgende vereinfachte Gleichung:}$$

$$R_{ip} = \frac{1}{2} \square h_{ip} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_i^m}{\partial q^m \cdot \partial q^p} + \frac{\partial^2 h_p^m}{\partial q^i \cdot \partial q^m} \right) .$$

Um die Gleichung erneut zu vereinfachen, führt man eine Koordinatentransformation durch:

$$q^i = \hat{q}^i - \epsilon^i(\hat{q}^1, \hat{q}^2, \hat{q}^3, \hat{q}^4) \quad , \quad \text{oder} \quad q^i = \hat{q}^i - \epsilon^i(\hat{q})$$

der nur geringe Abweichungen in $\epsilon^i(\hat{q})$ zulässt. Der neue metrische Tensor transformiert sich dann gemäß:

$$\hat{g}_{ip} = \frac{\partial q^m}{\partial \hat{q}^i} \cdot \frac{\partial q^n}{\partial \hat{q}^p} g_{mn} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial q^i}{\partial \hat{q}^l} = \delta^i_l - \frac{\partial \epsilon^i}{\partial \hat{q}^l} = \delta^i_l - \frac{\partial \epsilon^i}{\partial \hat{q}^l}$$

$$\hat{g}_{ip} = \left(\delta_i^m - \frac{\partial \epsilon^m}{\partial \hat{q}^i} \right) \cdot \left(\delta_p^n - \frac{\partial \epsilon^n}{\partial \hat{q}^p} \right) \cdot (\eta_{mn} + h_{mn})$$

$$\hat{g}_{ip} = \delta_i^m \cdot \delta_p^n \cdot (\eta_{mn} + h_{mn}) - \frac{\partial \epsilon^m}{\partial \hat{q}^i} \cdot \delta_p^n \cdot (\eta_{mn} + h_{mn}) - \delta_i^m \cdot \frac{\partial \epsilon^n}{\partial \hat{q}^p} \cdot (\eta_{mn} + h_{mn}) + \frac{\partial \epsilon^m}{\partial \hat{q}^i} \cdot \frac{\partial \epsilon^n}{\partial \hat{q}^p} \cdot (\eta_{mn} + h_{mn})$$

Vernachlässigen der Produkte liefert:

$$\hat{g}_{ip} = \delta_i^m \cdot \delta_p^n \cdot (\eta_{mn} + h_{mn}) - \frac{\partial \epsilon^m}{\partial \hat{q}^i} \cdot \delta_p^n \cdot \eta_{mn} - \delta_i^m \cdot \frac{\partial \epsilon^n}{\partial \hat{q}^p} \cdot \eta_{mn}$$

Die Kronecker-Symbole sind nur für **i=m und p=n** gleich Eins. Somit erhält man:

$$\hat{g}_{ip} = \eta_{ip} + h_{ip} - \frac{\partial \epsilon^m}{\partial \hat{q}^i} \cdot \delta_p^m \cdot \eta_{mp} - \delta_i^m \cdot \frac{\partial \epsilon^m}{\partial \hat{q}^p} \cdot \eta_{im}$$

Die Minkowskimetrik ist nur für $m=n$ ungleich 0. Dies liefert:

$$\eta_{ip} + \hat{h}_{ip} = \eta_{ip} + h_{ip} - \frac{\partial \epsilon^p}{\partial \hat{q}^i} \cdot \eta_{pp} - \frac{\partial \epsilon^i}{\partial \hat{q}^p} \cdot \eta_{ii}$$

h_{ip} transformiert sich dann gemäß:

$$\hat{h}_{ip} = h_{ip} - \frac{\partial \epsilon^i}{\partial \hat{q}^p} \cdot \eta_{ii} - \frac{\partial \epsilon^p}{\partial \hat{q}^i} \cdot \eta_{pp}$$

Es gilt:

$$\hat{h}_i^i = h_i^i - \frac{\partial \epsilon^i}{\partial \hat{q}^i} \cdot \eta_i^i - \frac{\partial \epsilon^i}{\partial \hat{q}^i} \cdot \eta_i^i$$

Und damit:

$$\hat{h}_i^i = h_i^i - 2 \cdot \frac{\partial \epsilon^i}{\partial \hat{q}^i} \cdot \eta_i^i,$$

weil wir $h_i^i = 0$ angenommen haben, erhält man:

$$\hat{h}_i^i = -2 \cdot \frac{\partial \epsilon^i}{\partial \hat{q}^i}$$

Nach dem Verfahren von oben können wir \hat{h}_{ij} ebenfalls traceless machen. Deshalb gilt:

$$\tilde{h}_i^i = -2 \cdot \frac{\partial \tilde{\epsilon}^i}{\partial \hat{q}^i} = 0$$

In der Gleichung

$$R_{ip} = \frac{1}{2} \square \hat{h}_{ip} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{h}_i^m}{\partial q^m \cdot \partial q^p} + \frac{\partial^2 \hat{h}_p^m}{\partial q^i \cdot \partial q^m} \right)$$

gilt dann:

$$\frac{\partial \hat{h}_i^m}{\partial q^m} = \frac{\partial h_i^m}{\partial q^m} - \frac{\partial^2 \epsilon^i}{\partial \hat{q}^m \partial \hat{q}^m} \cdot \eta_i^j - \frac{\partial^2 \epsilon^m}{\partial \hat{q}^i \partial \hat{q}^m} \cdot \delta_m^m$$

und der Term:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{q}^i} \frac{\partial \epsilon^m}{\partial \hat{q}^m} \cdot \delta_m^m = 0$$

verschwindet. Damit ergibt sich:

$$\frac{\partial \hat{h}_i^m}{\partial q^m} = \frac{\partial h_i^m}{\partial q^m} - \square \epsilon^i$$

Für die ϵ^i kann man also Funktionen verwenden, die die Differenzialgleichungen

$$\frac{\partial h_i^m}{\partial q^m} = \square \epsilon^i$$

lösen. Dann verschwinden die Terme $\left(\frac{\partial^2 \hat{h}_i^m}{\partial q^m \cdot \partial q^p} + \frac{\partial^2 \hat{h}_p^m}{\partial q^i \cdot \partial q^m} \right)$ im Ricci-Tensor:

$$R_{ip} = \frac{1}{2} \square \hat{h}_{ip} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \hat{h}_i^m}{\partial q^m \cdot \partial q^p} + \frac{\partial^2 \hat{h}_p^m}{\partial q^i \cdot \partial q^m} \right)$$

und man erhält so gemäß der Einsteinschen Feldgleichung:

$$\frac{1}{2} \square \hat{h}_{ip} - \frac{1}{2} R \cdot g_{ip} = - \frac{8 \pi G}{c^4} T_{ip} \quad .$$

Nun gilt aber $R = \text{trace}(R_{ip})$ und gemäß Konstruktion der Koordinaten $\text{trace}(R_{ip}) = 0$. Damit erhalten wir die einsteinsche Wellengleichung für Gravitationswellen zu:

$$\square \hat{h}_{ip} = - \frac{16 \pi G}{c^4} T_{ip} \quad .$$

Bei der Lösung der Differenzialgleichungen $\frac{\partial h_i^m}{\partial q^m} = \square \epsilon^i$ ist darauf zu achten, dass sich zwei Lösungen immer um einen homogenen Anteil $\square \epsilon_{\text{homogen}}^i = 0$ unterscheiden, die den Ricci-Tensor in der einsteinschen Feldgleichung aber nicht beeinflussen.

«Das Gravitationswellenobservatorium LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Detector) besteht aus zwei jeweils vier Kilometer langen interferometrischen Gravitationswellendetektoren in den USA. Ein Detektor befindet sich in Hanford, Washington, der Andere rund 3000 km entfernt in Livingston, Louisiana. Als Advanced LIGO („fortgeschrittenes LIGO“) bezeichnen die

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Wissenschaftler die aktuell in LIGO verbaute Technik, die zu den ursprünglichen Konzepten aus den 1990er Jahren erheblich verbessert wurde.

Auch wenn sie deutlich ausgeklügelter und komplizierter sind, sind LIGOs Interferometer im Prinzip Michelson-Interferometer, wie sie in den 1880er Jahren erfunden wurden. Beide haben eine L-förmige Gestalt und Spiegel an den Enden ihrer Laserlaufstrecken (Arme), um die Lichtstrahlen zu reflektieren und ein Interferenzmuster zu erzeugen. Beide messen die Muster und Intensitäten der Lichtstrahlen, nachdem sie überlagert und zur Interferenz gebracht wurden. Auf diese Weise können sie winzige relative Längenänderungen beider Arme von besser als ein Teil in 10^{22} nachweisen, die von Gravitationswellen erzeugt werden.»⁵⁰



[Bild: Caltech/MIT/LIGO Lab]

«Das Karolinska-Institut in Stockholm verkündete, was viele erwartet und gehofft hatten - ehrlich gesagt auch wir Journalisten. Denn der Nachweis der Gravitationswellen ist ohne Zweifel eine der bedeutendsten Entdeckungen in der Physik und eine Bestätigung, dass Albert Einstein recht hatte. Er sagte die Existenz dieser Wellen mit seiner Relativitätstheorie vor 100 Jahren voraus.

Viele Forscher und Institute waren beteiligt. Doch nur drei – das ist die Regel bei der Vergabe – können die höchste wissenschaftliche Auszeichnung erhalten. Ebenso können Institute keinen Nobelpreis bekommen – auch das ist eine Regel, sonst wäre höchstwahrscheinlich das gesamte

⁵⁰ Aus: <https://www.einstein-online.info/spotlight/aligo/>

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

LIGO damit geehrt worden, denn an diesem Observatorium war am 14. September 2015 der erste Nachweis gelungen.

Das sind die Preisträger:

Rainer Weiss wurde in Berlin geboren, floh aber mit seiner Familie während des Zweiten Weltkriegs vor den Nationalsozialisten. 1938 kam er in die USA, ging in New York zur Schule und studierte am Massachusetts Institute of Technology (MIT). Am Anfang seiner Laufbahn beschäftigte er sich vor allem mit Atomphysik. Ende der 1980er Jahre spielte er schließlich eine führende Rolle bei der Entwicklung von Gravitationswellendetektoren. Daraus entwickelte sich das LIGO-Projekt.

Kip Thorne war bis 2009 Professor der theoretischen Physik am California Institute of Technology (Caltech), auch Barry Barish forschte dort.

Vermutlich werden einige enttäuscht sein, leer ausgegangen zu sein. Vielleicht auch Karsten Danzmann, Direktor am Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik in Hannover. Er war maßgeblich an der Entdeckung der Gravitationswellen beteiligt und bekam dafür unter anderem den renommierten Körber-Preis.

Insgesamt arbeiteten über 1000 Wissenschaftler daran, die Wellen in der Raumzeit zu entlarven.

Viele Physiker rechneten damit, dass die Entdeckung von Gravitationswellen den Nobelpreis erhalten würde. Doch die Publikation der Wissenschaftler kam ein bisschen zu spät, um noch für 2016 berücksichtigt werden zu können.⁵¹

Barry Barish hielt an der Universität Bern einen Vortrag über die Entdeckungen an den Gravitationswellendetektoren (<https://www.youtube.com/watch?v=Pz5xLDUFk9M&t=759s>). Eine Zusammenfassung der Ergebnisse ist leider nicht möglich, da ich keine Freigabe der Folien erhalten habe.

⁵¹ <https://www.dw.com/de/physik-nobelpreis-f%C3%BCr-die-entdecker-der-gravitationswellen/a-40778852>

5.8 Schwarze Löcher

5.8.1 Die Entropie und der Ereignishorizont Schwarzer Löcher

Wir hatten schon aus der äußeren Schwarzschildmetrik den Radius des Ereignishorizontes eines ungeladenen, nicht rotierenden Schwarzen Lochs zu $R = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$ hergeleitet. Wir gehen davon aus, dass ein Photon im Schwarzen Loch verschwindet, sodass alle Informationen des Photons für einen äußeren Beobachter verloren gehen. Versteckte Informationen sind ein Maß für die Entropie eines abgeschlossenen physikalischen Systems. Die Energie, die dem Schwarzen Loch zugeführt wird, beträgt dann 1 Bit an Information:

$$\Delta E = \frac{h \cdot c}{\lambda} \quad \text{oder} \quad \Delta E = \frac{h \cdot c}{R} .$$

Die Änderung der Masse des Schwarzen Lochs ist dann:

$$\Delta M = \frac{\Delta E}{c^2} \quad \text{oder} \quad \Delta M = \frac{h}{R \cdot c} .$$

Aus $R = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$ erhält man $\Delta R = \frac{2 \cdot G \cdot \Delta M}{c^2}$. Mit dem Ausdruck $\Delta M = \frac{h}{R \cdot c}$ liefert dies:

$$\Delta R = \frac{2 \cdot G \cdot h}{R \cdot c^3} \quad \text{oder} \quad \Delta R = \frac{4 \cdot \pi \cdot G \cdot \hbar}{R \cdot c^3} .$$

Die Änderung ΔR^2 erhält man aus der Produktregel zu $\Delta R^2 = 2 \cdot R \cdot \Delta R$. Damit ist die Änderung von $\Delta R^2 = \frac{4 \cdot G \cdot h}{c^3}$ oder $\Delta R^2 = \frac{8 \cdot \pi \cdot G \cdot \hbar}{c^3}$.

Also ändert sich die Oberfläche des Ereignishorizontes um eine konstante Größe. Die Zunahme der Entropie ist proportional zur Vergrößerung der Oberfläche des Ereignishorizontes eines Schwarzen Lochs:

$$S = \eta \cdot A$$

Dabei bezeichnet S die Entropie des Schwarzen Lochs und A die Oberfläche des Ereignishorizontes.

5.8.2 Die Hawking Strahlung

Wir wollen nun die Konstante η bestimmen. Dazu werden wir eine Analyse der physikalischen Dimensionen [L] für die Länge, [T] für die Zeit, [M] für die Masse und [Θ] für die Temperatur durchführen, um dies mit Mitteln der Schulmathematik zu bewerkstelligen. Für die Bestimmung der Proportionalitätskonstanten benutzen wir darüber hinaus die folgenden Energieformen, die entsprechende physikalische Konstanten enthalten:

| | |
|---|---|
| Potenzielle Energie im Gravitationsfeld | $E = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$ |
| Strahlungsenergie | $E = \hbar \cdot \omega$ |
| Thermische Energie | $E = \frac{3}{2} \cdot N \cdot k_B \cdot T$ |

In den Formeln gibt es drei wichtige physikalische Konstanten:

| | |
|---------|-----------------------------|
| G | Gravitationskonstante |
| \hbar | Plancksches Wirkungsquantum |
| k_B | Boltzmann Konstante |

Nach Einstein ist $E = m \cdot c^2$, und damit hat die Energie die Dimension $[M] \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-2}$. Benutzt man die Formeln von oben für die Energie, dann erhält man für die physikalischen Konstanten folgende Dimensionen:

| | |
|---------------------------|---|
| Lichtgeschwindigkeit c | $[L] \cdot [T]^{-1}$ |
| Gravitationskonstante G | $[L]^3 \cdot [M]^{-1} \cdot [T]^{-2}$ |
| Planck-Konstante \hbar | $[M] \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-1}$ |
| Boltzmann-Konstante k_B | $[M] \cdot [L]^2 \cdot [\Theta]^{-1} \cdot [T]^{-2}$ (Energie durch Temperatur) |
| Entropie S | $[M] \cdot [L]^2 \cdot [\Theta]^{-1} \cdot [T]^{-2}$ (Energie durch Temperatur) |

Die Dimension der Entropie S hat gemäß der Formel von Boltzmann für die Entropie $S = k_B \cdot \ln(W)$ dieselbe Dimension wie die Boltzmann-Konstante. Dies liefert die Dimension

von $\eta = \frac{S}{A}$ mit $[\eta] = [M][T]^{-2}[\Theta]^{-1}$.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Als Nächstes soll die Konstante η als Kombination der vier physikalischen Naturkonstanten G , \hbar , k_B und c bestimmt werden. Dazu machen wir folgenden Ansatz:

$$[\eta] = [M] \cdot [T]^{-2} \cdot [\Theta]^{-1} = [G]^\alpha \cdot [\hbar]^\beta \cdot [c]^\gamma \cdot [k_B]^\delta$$

$$[M] \cdot [T]^{-2} \cdot [\Theta]^{-1} = [[L]^3 \cdot [M]^{-1} \cdot [T]^{-2}]^\alpha \cdot [[M] \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-1}]^\beta \cdot [[L] \cdot [T]^{-1}]^\gamma \cdot [[M] \cdot [L]^2 \cdot [\Theta]^{-1} \cdot [T]^{-2}]^\delta$$

$$[M] \cdot [T]^{-2} \cdot [\Theta]^{-1} = [L]^{3\alpha+2\beta+\gamma+2\delta} \cdot [M]^{-\alpha+\beta+\delta} \cdot [T]^{-2\alpha-\beta-\gamma-2\delta} \cdot [\Theta]^{-\delta}$$

Durch Exponentenvergleich in den physikalischen Dimensionen erhält man ein Gleichungssystem mit den vier Unbekannten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Die Lösung ist $\alpha = -1; \beta = -1; \gamma = 3; \delta = 1$.

Damit haben wir für die Entropie eines Schwarzen Lochs, das ungeladen ist und sich nicht dreht, Folgendes gefunden:

$$S \sim \frac{k_B \cdot c^3}{G \cdot \hbar} \cdot A$$

Hawking konnte zeigen, dass in dieser Formel der Proportionalitätsfaktor $\frac{1}{4}$ ist. Damit ist die Formel für die Entropie eines Schwarzen Lochs:

$$S = \frac{k_B \cdot c^3}{4 \cdot G \cdot \hbar} \cdot A$$

Die Oberfläche des Ereignishorizontes ist: $O_E = 4 \cdot \pi \cdot r_s^2$ mit dem Schwarzschildradius $r_s = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$ hat man dann die Formel: $O_E = \frac{16 \cdot \pi \cdot G^2 \cdot M^2}{c^4}$. Damit haben wir für die Entropie:

$$S = \frac{4 \cdot \pi \cdot k_B \cdot G \cdot M^2}{\hbar \cdot c}$$

Wir haben $dS = \frac{dE}{T}$ mit T als Variable für die Temperatur. Nach Einstein ist $E = m \cdot c^2$ und damit gilt: $dE = dm \cdot c^2$. Damit erhält man für die Temperatur T die Formel:

$$T = c^2 \cdot \frac{dm}{dS} \quad \text{oder}$$

$$T = c^2 \cdot \left(\frac{dS}{dm} \right)^{-1}$$

mit der Formel für S von oben

$$T = c^2 \cdot \left(\frac{8 \cdot \pi \cdot k_B \cdot G \cdot M}{\hbar \cdot c} \right)^{-1}$$

$$T = \frac{\hbar \cdot c^3}{8 \cdot \pi \cdot k_B \cdot G \cdot M} \approx \frac{1,227 \cdot 10^{23}}{M}$$

Diese Temperatur ist die Hawking-Temperatur eines Schwarzen Lochs.

Die Hawking-Temperatur von massereichen Schwarzen ist sehr klein. Für ein Schwarzes Loch mit der Masse unserer Sonne $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ erhält man einen Wert von $6,135 \cdot 10^{-8}$ Kelvin. Für ein Schwarzes Loch mit der Masse unserer Erde $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ beträgt die Hawking-Temperatur ungefähr $2,45 \cdot 10^{-2}$ Kelvin. Da die Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung bei ungefähr 2,7 Kelvin liegt, absorbiert ein Schwarzes Loch diese Strahlung. Haben wir also keine Hintergrundstrahlung mehr, weil die Schwarzen Löcher sie absorbiert haben und das Universum weiter expandiert ist, dann verliert das Schwarze Loch aufgrund seiner Hawking-Strahlung Masse. Dies führt dazu, dass Schwarze Löcher verdampfen und zur Frage, wie lange es dauert, bis das Schwarze Loch verdampft ist.

Die Leistung ist $P = \frac{E}{t}$, oder $t = \frac{E}{P}$. Dies entspricht der Zeit, die notwendig ist, dass das Schwarze Loch verschwindet. Wir benötigen dazu das Stefan-Boltzmann-Gesetz, das angibt, welche Strahlungsleistung P ein Schwarzer Körper der Fläche A und der absoluten Temperatur T aussendet. Dies können wir mit der Analyse physikalischer Dimensionen herleiten. Dazu machen wir folgenden Ansatz:

$$\frac{P}{A} \sim \hbar^\alpha \cdot c^\beta \cdot k_B^\gamma \cdot T^\delta$$

$$\left[\frac{P}{A} \right] = [\hbar]^\alpha \cdot [c]^\beta \cdot [k_B]^\gamma \cdot [\Theta]^\delta$$

Wobei T für die Temperatur steht und die anderen Variablen für die entsprechenden physikalischen Konstanten von oben.

$$\frac{[P]}{[A]} = \frac{[M] \cdot [L]^2}{[T]^3 \cdot [L]^2} = [M] \cdot [T]^{-3} = ([M] \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-1})^\alpha \cdot ([L] \cdot [T]^{-1})^\beta \cdot ([M] \cdot [L]^2 \cdot [T]^{-2} \cdot [\Theta]^{-1})^\gamma \cdot [\Theta]^\delta$$

$$[M] \cdot [T]^{-3} = [M]^{\alpha+\gamma} \cdot [L]^{2\alpha+\beta+2\gamma} \cdot [T]^{-\alpha-\beta-2\gamma} \cdot [\Theta]^{-\gamma+\delta}$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Dies liefert vier lineare Gleichungen mit den Exponenten als unbekannte Größen.

$\alpha + \gamma = 1$; $2\alpha + \beta + 2\gamma = 0$; $-\alpha - \beta - 2\gamma = -3$; $-\gamma + \delta = 0$. Die Lösungen des Gleichungssystems sind:

$\alpha = -3$; $\beta = -2$; $\gamma = 4$; $\delta = 4$. Damit erhalten wir: $\frac{P}{A} \sim \hbar^{-3} \cdot c^{-2} \cdot k_B^4 \cdot T^4$, oder

$\frac{P}{A} \sim \frac{k_B^4}{\hbar^3 \cdot c^2} \cdot T^4$. Das exakte Resultat findet man über die Quantenmechanik zu:

$$\frac{P}{A} = \frac{\pi^2}{60} \cdot \frac{k_B^4}{\hbar^3 \cdot c^2} \cdot T^4.$$

Für die Leistung P gilt: $P = -\frac{dE}{dt} = \frac{\pi^2}{60} \cdot \frac{k_B^4}{\hbar^3 \cdot c^2} \cdot A \cdot T^4$. Es handelt sich um einen

Energieverlust des Schwarzen Lochs. Substituiert man $A = \frac{16 \cdot \pi \cdot G^2 \cdot M^2}{c^4}$ und

$T = \frac{\hbar \cdot c^3}{8 \cdot \pi \cdot k_B \cdot G \cdot M}$ liefert dann die Differenzialgleichung:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{\hbar \cdot c^6}{15360 \cdot \pi \cdot G^2} \cdot \frac{1}{M^2}.$$

Mit Einstein $dE = dM \cdot c^2$ erhält man nach Separation

der Variablen folgende Gleichung: $M^2 dm = -\frac{\hbar \cdot c^4}{15360 \cdot \pi \cdot G^2} dt$. Die Integration liefert:

$$\frac{1}{3} \cdot M^3 = -\frac{\hbar \cdot c^4}{15360 \cdot \pi \cdot G^2} t$$

mit den Grenzen $t=0$, die Zeit, wenn der Verdampfungsprozess

des Schwarzen Lochs begann und t für die aktuelle Zeit:

$$\frac{1}{3} \cdot M(t)^3 - \frac{1}{3} \cdot M(0)^3 = -\frac{\hbar \cdot c^4}{15360 \cdot \pi \cdot G^2} t.$$

Um die Zeit bis zur vollständigen Verdampfung des Schwarzen Lochs zu berechnen, setzen wir $M(t)=0$ und $M(0)=M$. Dies liefert dann:

$$t_{\text{evap}} = \frac{5120 \cdot \pi \cdot G^2}{\hbar \cdot c^4} \cdot M^3 \approx 10^{-16} \cdot M^3$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Schwarze Löcher sind überaus stabile Objekte. Aus Sicht der Schwarzen Löcher im Universum ist das Universum mit $13,8 \cdot 10^9$ Jahren sehr jung. Ein Schwarzes Loch von der Masse der Sonne $2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ hat nämlich eine Verdampfungszeit von ca. $8 \cdot 10^{74} \text{ s}$ oder $2,5 \cdot 10^{67}$ Jahre. Hingegen sind Schwarze Löcher, die zu Beginn des Universums entstanden und jetzt verdampft sind, wahre leichtgewichtige Objekte gewesen. Nimmt man den Wert 10^{17} s für das Alter des Universums, so ist die Masse ca. $M = \sqrt[3]{\frac{10^{17}}{10^{-16}}} = 10^{11} \text{ kg}$. Dies entspricht ungefähr der Masse eines kleinen Asteroiden.

Dafür ist das Ende eines Schwarzen Lochs dramatisch. In der letzten Sekunde wird eine Masse von $M = \sqrt[3]{\frac{1}{10^{-16}}} \approx 10^5 \text{ kg}$ in Strahlungsenergie umgewandelt. Dies entspricht einem Gamma-Ray-Burst, weil die Wellenlänge der Strahlung ca. 10^{-21} m beträgt und über folgende Näherungsformel $\lambda \approx \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{T}$ berechnet werden kann. Dabei ist T die Temperatur, die ein Schwarzes Loch mit der Masse 10^5 kg besitzt.

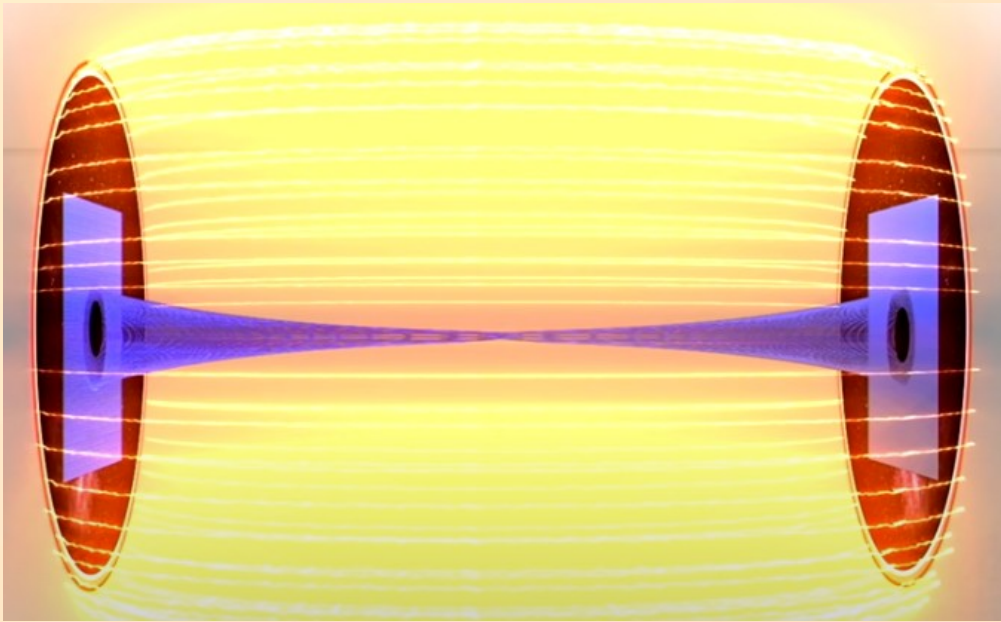
In der Formel für die Entropie $S = \frac{k_B \cdot c^3}{4 \cdot G \cdot \hbar} \cdot A$ ist $\frac{c^3}{G \cdot \hbar}$ enthalten, was der inversen Planck-Fläche entspricht. Deshalb gilt: $S = \frac{k_B}{4} \cdot \frac{A}{l_p^2}$, dabei ist l_p die Plancklänge. Die Entropie eines

Schwarzen Lochs ist also direkt proportional zur Anzahl der Planck-Flächen, die die Oberfläche des Ereignishorizontes ausschöpfen. Wenn wir in jeder Planck-Zelle binäre Information abspeichern können, dann können wir insgesamt 2^N Informationen auf der Oberfläche abspeichern. Dies bedeutet, dass es in diesem binären Model insgesamt 2^N Mikrozustände gibt, die, gemäß der Formel von Boltzmann: $S = k_B \cdot \ln(W) = k_B \cdot \ln(2^N) = k_B \cdot N \cdot \ln(2)$ der Entropie entsprechen. Die Entropie ist also ein Maß dafür, wie viele Informationen an der Oberfläche des Ereignishorizontes gespeichert werden können, was letztendlich zum holografischen Prinzip führt.

Einstein hat schon gesehen, dass seine Feldgleichungen Wurmlöcher zulassen. Dabei handelt es sich um Abkürzungen zwischen zwei getrennten Regionen in der Raumzeit. Ebenso hat Einstein die Verschränkung zweier quantenmechanischer Objekte nicht akzeptiert, weil diese prinzipiell atemporal ist. Heute wissen wir allerdings durch Experimente, dass es die quantenmechanische Verschränkung gibt.

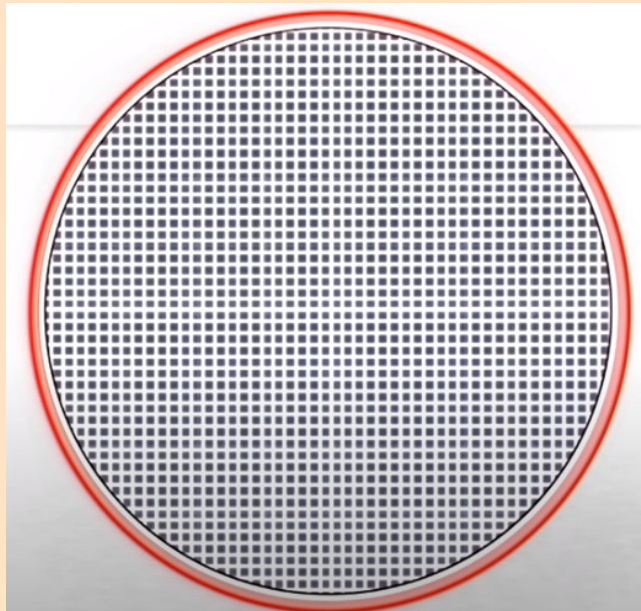
Interessant wird das holografische Prinzip, wenn man es zusammen mit der quantenmechanischen Eigenschaft der Verschränkung verbindet. Hat man zwei Schwarze Löcher, deren Ereignishorizonte miteinander verschränkt sind, dann entspricht der Raum zwischen den beiden Schwarzen Löchern einem Wurmloch.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version



Aus: <https://www.youtube.com/watch?v=M22MESHcyx8>

Hat man nur ein Schwarzes Loch, auf dessen Ereignishorizont auch die Informationen von verschränkten quantenmechanischen Zuständen gespeichert sind, dann passiert mit dem Raum innerhalb des Schwarzen Lochs eine Teilung, wenn man auf dem Ereignishorizont die Verschränkung eines quantenmechanischen Paares aufhebt. Hebt man alle Verschränkungen auf dem Ereignishorizont auf, dann wird der Raum im Schwarzen Loch gepixelt.



Aus: <https://www.youtube.com/watch?v=M22MESHcyx8>

Damit ist es möglich geworden, die Raumzeit zu quantisieren.

5.8.3 Singularitätstheoreme

Man findet die Singularitätstheoreme auch in mathematischen Lehrbüchern über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit Pseudometrik. Die Dimension der Riemannschen Mannigfaltigkeit kann beliebig sein, die Pseudometrik kann eine beliebige Signatur haben. Hier werden die Dinge ganz allgemein betrachtet, ohne auf die Raumzeitstruktur der einsteinschen Feldgleichungen einzugehen. Siehe dazu z. B. *Semi-Riemannian-Geometry*, Barrett O'Neill, Academic Press, 2010.

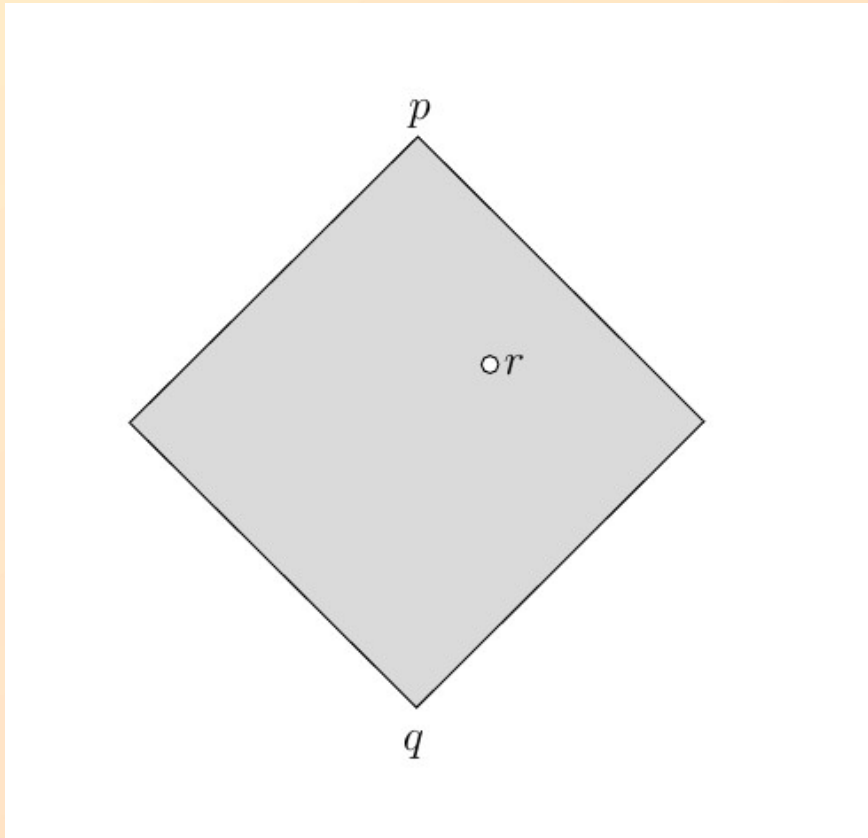
Allerdings habe ich ein Skript mit dem Namen: *Light Rays, Singularities, and All That* von Edward Witten unter <https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>⁵² im Internet gefunden. Hier werden die abstrakten Begriffe der Differenzialgeometrie sehr anschaulich erklärt, und sie werden speziell für die physikalische Raumzeit dargestellt.

Ich habe diesen Zugang gewählt. Die Singularität Schwarzer Löcher, die Penrose gefunden hat und sich auf lichtartige Kurven in der Raumzeit bezieht, und die Singularität, die Hawking gefunden hat und sich auf zeitartige Kurven in der Raumzeit bezieht, werden hier im Folgenden besprochen. Alle Grafiken sind aus dem Skript. Sie sollen dazu dienen, die differenzialgeometrischen Begriffe zu veranschaulichen.

52 Der Link funktioniert heute nicht mehr

5.8.3.1 Vorbereitung

Wir betrachten differenzierbare Wege im Minkowskiraum. Der Tangentenvektor soll dabei immer von 0 verschieden sein. Die Wege heißen **kausal**, wenn sie zwei Punkte in der Raumzeit verbinden, sodass der Weg nur im Lichtkegel der beiden Punkte verläuft.



*Bild 1: Light Rays, Singularities, and All That, Edward Witten,
<https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>*

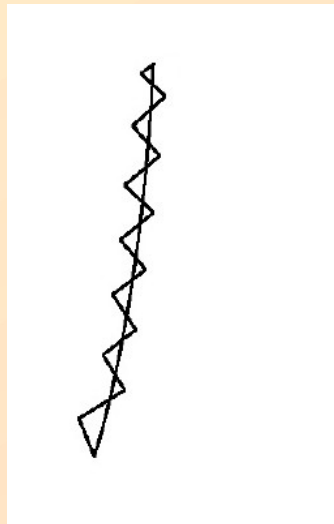
Der Punkt r liegt im Vergangenheitskegel von p und der Punkt r im Zukunftskegel von q. Der differenzierbare Weg verbindet q mit p. Der Bereich, in dem der kausale Weg verläuft, ist in der Skizze grau unterlegt.

Dadurch, dass der differenzierbare Weg nur im grauen Bereich des Minkowskiraums verlaufen kann, sind seine Tangentenvektoren beschränkt. Es gilt: $\left| \frac{dx}{dt} \right| \leq 1$. Dies führt dazu, dass die Menge

der kausalen Wege kompakt ist. Mit $\tau = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \left(\frac{d\vec{x}}{ds} \right)^2} ds$ hat man somit eine Abbildung von der Menge der kausalen Wege in die Menge der reellen Zahlen. Da die Menge der Wege kompakt ist, hat das Integral ein Maximum. Dieser kausale Weg, für den dies der Fall ist, nennt man eine Geodäte.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Differenzierbar ist hier wichtig. Lässt man die Bedingung weg, kann man jede Kurve durch sehr stark oszillierende lichtartige Kurven approximieren, wie folgende Abbildung zeigt:



*Bild 2: Light Rays, Singularities, and All That, Edward Witten,
<https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>*

Hat man eine beliebige Mannigfaltigkeit, dann nennt man diese Mannigfaltigkeit streng kausal (Wege sind zeitartig oder lichtartig), wenn alle kausalen Wege von q nach p in einer lokalen Minkowski-Nachbarschaft von q enthalten sind, falls p nah genug an q liegt. Im Weiteren wird immer von strenger Kausalität ausgegangen.

Definition: Eine Teilmenge von S einer Mannigfaltigkeit M nennt man **achronal**, wenn es zu zwei Punkten p und q in S keine zeitartige Kurve in M gibt, die p mit q verbindet.

Beispiel:

Gegeben sei die Metrik $ds^2 = -dt^2 + d\Phi^2$, wobei Φ ein Winkel ist mit $\Phi \equiv \Phi + 2\pi$. Betrachtet man die Kurve $c(t) = (\epsilon \cdot t, t)$ mit $\epsilon \geq 0$, dann ist für $\epsilon < 1$ die Hyperfläche $S_\epsilon = \text{Bild}(c)$ raumartig, weil $ds^2 = -\epsilon^2 dt^2 + dt^2 = dt^2(1 - \epsilon^2) > 0$ ist, aber nicht achronal, weil die beiden Punkte $(t, \Phi) = (0, 0)$ und $(t, \Phi) = (2\pi \cdot \epsilon, 2\pi) \equiv (2\pi \cdot \epsilon, 0)$ sich auf dem Zylinder (die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit M) mit einer zeitartigen Kurve $c(t) = (t, 0); 0 \leq t \leq 2\pi \cdot \epsilon$ verbinden lassen. Achronal ist also eine strengere Bedingung als raumartig. Eine Hyperfläche ist raumartig, falls zwei nahe beieinander liegende Punkte nicht über eine zeitartige Kurve in einer kleinen Umgebung dieser Punkte verbunden werden können. Achronal ist eine Hyperfläche, wenn das für alle Punkte der Hyperfläche S gilt.

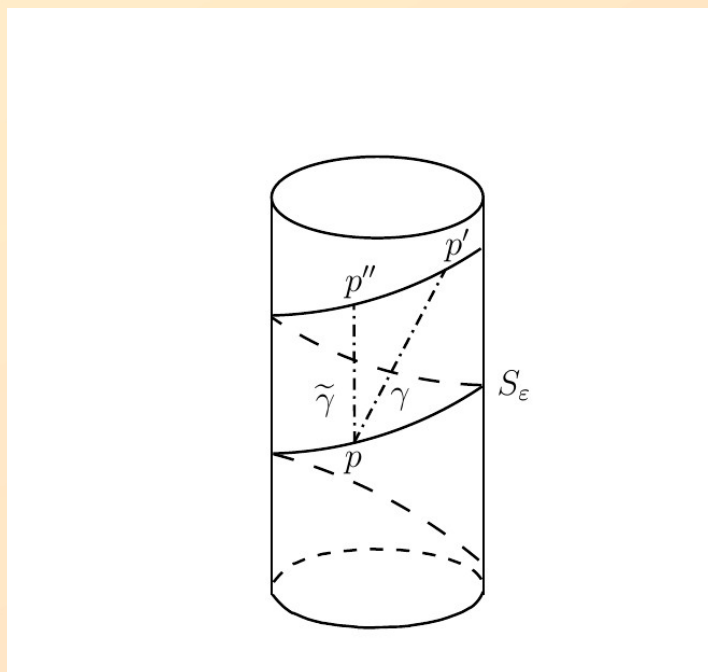


Bild 4: *Light Rays, Singularities, and All That*, Edward Witten,
<https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>

Falls eine Hyperfläche S achronal und raumartig ist, dann gibt es keinen zeitartigen Weg, der zwei unterschiedliche Punkte p und p' in S miteinander verbindet. Denn sei der Weg γ eine lichtartige Kurve auf dem Zylinder, der die Punkte p und p' verbindet, dann lässt er sich über zeitartige Kurven in den Weg $\tilde{\gamma}$ deformieren, der die Punkte p und p'' verbindet. Damit haben wir eine Variation von zeitartigen Wegen gefunden, die der Definition der Achronalität widersprechen.

Definition: Eine Kurve nennt man unvollständig, falls es nicht möglich ist, sie in eine Richtung zu erweitern. Eine Raumzeit heißt singulär, falls es mindestens eine unvollständige Kurve gibt.

Beispiel: Man nimmt eine zeitartige Kurve γ in einer Raumzeit M , die p und q verbindet. Man entfernt dann einen Punkt r auf der Kurve γ und erhält eine neue Raumzeit M' . Die Kurve γ teilt sich dann in zwei Kurven γ_1 und γ_2 auf. Damit ist γ_1 nicht in die Zukunft erweiterbar und γ_2 nicht in die Vergangenheit.

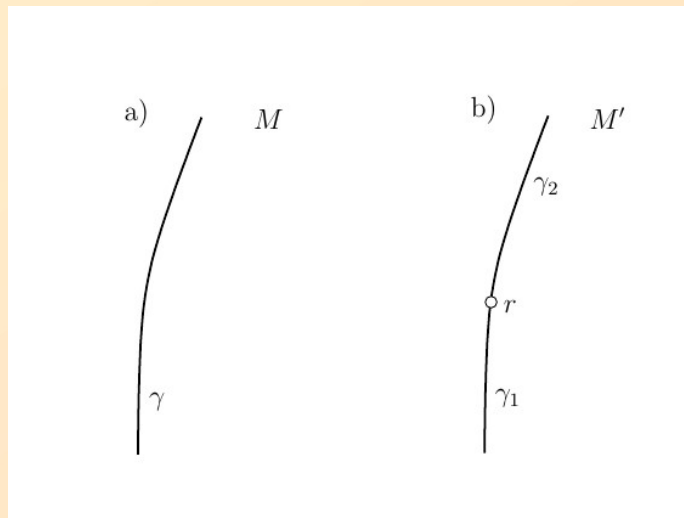


Bild 5: Light Rays, Singularities, and All That, Edward Witten,
<https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>

Sei γ eine Kurve in der Raumzeit, dann kann man das Kurvenargument so wählen, dass es im Einheitsintervall offen, halboffen oder geschlossen liegt. Der Endpunkt $\gamma(1)=p$ ist in der Zukunft oder aber $\lim_{s \rightarrow 1} \gamma(s)=p$. Von p aus können wir dann weitere zeitartige Wege zu anderen Punkten in der Raumzeit konstruieren. Wenn also γ nicht erweiterbar in die Zukunft ist, meint dies, dass γ keinen Endpunkt in der Zukunft hat und es unmöglich ist, einen in der Raumzeit M liegenden Punkt hinzuzufügen.

Definition: Eine **Cauchy-Hyperfläche** einer Raumzeit M oder eine Anfangswert-Hyperfläche in M ist eine achronale, raumartige Hyperfläche S , mit der Eigenschaft:

Ist p ein Punkt in M , der nicht in S liegt, dann wird jeder nicht erweiterbare, zeitartige Weg γ durch p die Hyperfläche S schneiden.

Erklärung: Jedes physikalische Phänomen, das man im Punkt p beobachten kann, rührt von einem zeitartigen Weg. Wenn p nun in der Zukunft von S liegt und eine geeignete Erweiterung eines zeitartigen Weges in die Vergangenheit durch p S schneidet, dann ist es möglich, die Physik in p durch die Anfangswerte des Schnittpunktes in S vorherzusagen. Für zeitartige Wege, die man in die Vergangenheit erweitert und durch p gehen und S nicht schneiden, ist es nicht möglich, die Physik in p durch die Anfangswerte eines Punktes in S vorherzusagen.

Definition: Eine Raumzeit M mit Cauchy-Hyperfläche S wird **global hyperbolisch** genannt.

Beispiel:

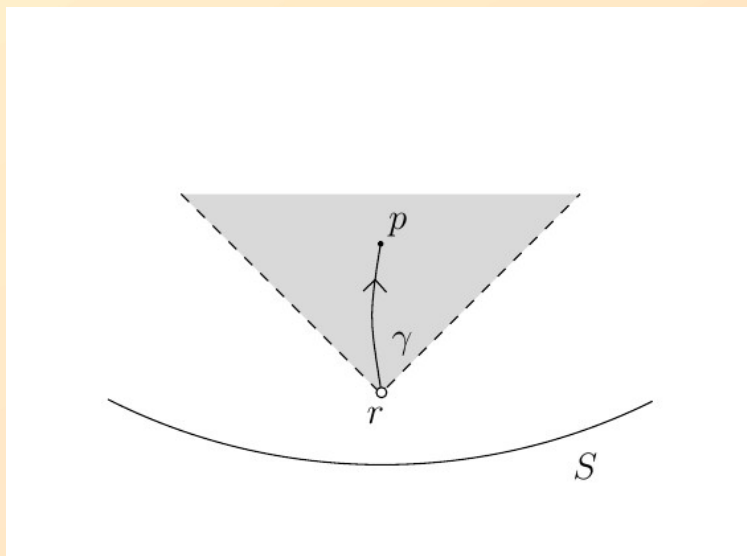


Bild 6: Light Rays, Singularities, and All That, Edward Witten,
<https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>

Die Hyperfläche S in der Raumzeit M ist nicht global hyperbolisch, weil der Punkt r in der Zukunft von S in M nicht vorkommt und die zeitartige Kurve γ nicht in die Vergangenheit erweitert werden kann, sodass sie S schneidet.

Satz: Eine global hyperbolische Raumzeit M kann keine geschlossenen zeitartigen Kurven enthalten.

Beweis: Eine geschlossene, zeitartige Kurve ist nicht erweiterbar. Deshalb schneidet sie eine Cauchy-Hyperfläche mehrmals, wenn man sie mittels der reellen Zahlen parametrisiert. Zwei Schnittpunkte dieser Hyperfläche kann man also durch eine zeitartige Kurve in M verbinden. Dies ist ein Widerspruch zur Achronalität.



Satz: Falls M eine Raumzeit mit Cauchy-Hyperfläche S ist, dann ist jede andere Cauchy-Hyperfläche S' topologisch äquivalent zu S .

Beweisidee: Man zeigt, dass es zu jedem Punkt p in S' eine eindeutige Integralkurve gibt, die S in q schneidet. Dann bildet diese Integralkurve eindeutig jeden Punkt p in S' auf einen Punkt q' in S ab. Mit dieser Abbildung kann man dann einen topologischen Isomorphismus zwischen S' und S definieren. (Siehe <https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>, Seite 16 für die Wahl des Koordinatensystems).

Eine globale hyperbolische Raumzeit hat die Eigenschaft, dass der Raum von kausalen Wegen mit geeigneten Bedingungen an die Endpunkte der Wege kompakt ist.

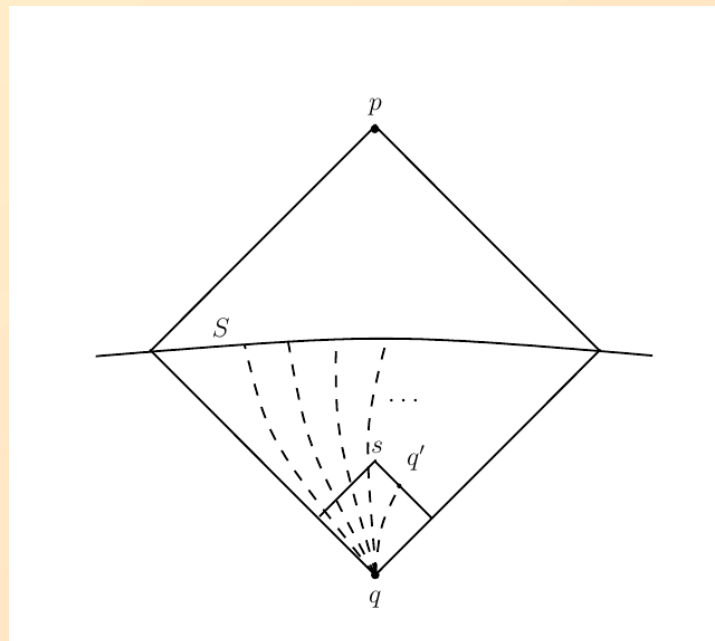


Bild 7: *Light Rays, Singularities, and All That*, Edward Witten,
<https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>

Sei q ein Punkt in der Vergangenheit von S . Sei $C(q, S)$ die Menge aller kausalen Wege von q nach S . Dieser Raum ist kompakt. Falls der Punkt s nahe in der Zukunft von p liegt, dann sieht die Menge der kausalen Wege von q nach s so aus, als würden sie im Minkowskiraum liegen (lokale Eigenschaft der Raumzeit). Die Wege schneiden den Lichtkegel in q' . Von dort aus können wir die Konstruktion fortsetzen, und die Kompaktheit garantiert, dass wir in endlich vielen Schritten einen kausalen Weg von q nach S erhalten. Da man diese Konstruktion auch von p aus machen können, liefert das durch Zusammensetzung der Wege kausale Wege von p nach q .

Die Kompaktheit des Raums aller kausalen Wege in einer globalen hyperbolischen Raumzeit garantiert uns, dass es Wege mit maximaler Eigenzeit gibt. Diese Wege sind dann die Geodäten.

Wir haben schon gesehen, dass es möglich ist, eine achronale, raumartige Hyperfläche S zu haben, die keine Cauchy-Hyperfläche ist. Es ist aber immer wahr, falls p ein Punkt ist, der in nächster Zukunft eines Punktes q liegt, dass ein nicht erweiterbarer Weg durch p S schneidet.

Definition: D_S enthält alle Punkte p in der Raumzeit M , sodass alle nicht erweiterbaren Wege durch p einen Schnittpunkt mit S haben.

D_S ist der größte Bereich in M , sodass man durch die Kenntnis der Anfangswerte in S die Physik in p vorhersagen kann.

S unterteilt D_S in einen Zukunfts- und einen Vergangenheitsbereich bezeichnet mit D_S^+ und D_S^- .

Definition: Die Ränder von D_S , D_S^+ und D_S^- werden Cauchy-Horizonte H_S , H_S^+ und H_S^- genannt.

Eine offensichtliche Kausalitätsbedingung in der Raumzeit ist, dass es außer der konstanten Kurve keine geschlossene Kurve in der Raumzeit geben kann. Eine strengere Kausalitätsbedingung ist die der global hyperbolischen Raumzeiten. Die etwas schwächere Bedingung, aber immer noch stärker als die Abwesenheit von geschlossenen Kurven, ist die der strengen Kausalität. D. h.: Zu jedem Punkt p in M gibt es eine kleine Umgebung U , sodass jede kausale Kurve von p nach q vollständig in U verläuft. Es zeigt sich, dass eine global hyperbolische Raumzeit auch streng kausal ist.

Sei M ein Minkowskiraum und M' die Untermenge in M , die durch $-1 < t < 1$ bestimmt wird. Dann ist $S: t = 0$ eine Cauchy-Hyperfläche. Ein zeitartiger Weg in M' endet nach endlicher Zeit, weil wir t eingeschränkt haben. Deshalb untersucht man die maximale Untermenge in M , deren Wege durch S festgelegt sind, wenn M eine global hyperbolische Raumzeit mit Cauchy-Hyperfläche S ist.

Ist eine Geodäte immer die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten? Dies ist richtig, wenn die beiden Punkte nahe beieinander liegen. Betrachtet man allerdings Geodäten für entfernte Punkte, so stimmt dies nicht mehr.

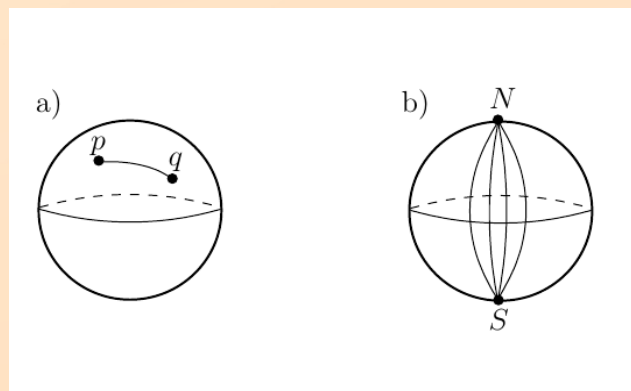


Bild 8: Light Rays, Singularities, and All That, Edward Witten,
<https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>

Eine Geodäte zwischen zwei Punkten p, q auf der Sphäre, die weniger als 90° longitudinal entfernt sind, ist die kürzeste Entfernung zwischen p und q . Eine Geodäte vom Nord- zum Südpol ist ebenfalls die kürzeste Entfernung. Geht man allerdings longitudinal weiter als 90° , dann ist die Geodäte nicht mehr die kürzeste Entfernung.

Falls man eine Geodäte von p nach q durch eine kürzere Geodäte von p nach q ersetzen kann, dann nennt man den Punkt q auch fokal oder konjugiert. Der Punkt S ist also ein fokal oder konjugiert für alle Geodäten zum Südpol.

Oft ist es notwendig, die kürzeste Entfernung zwischen einem Punkt q und einer Untermannigfaltigkeit W zu kennen. Dies ist erfüllt in (a) für einen Weg, der orthogonal zu W ist.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Die Abbildung zeigt, wie man γ ändern muss, um einen kürzesten Weg zu erhalten. Er liegt auf dem Rand der Mannigfaltigkeit und schneidet die Tangentialebene orthogonal in diesem Punkt.

In (b) liegt auf dem Rand von W von q aus gesehen ein Punkt p , sodass der Weg von q nach p senkrecht auf der Tangentialebene in p steht. Der Punkt q' ist ein konjugierter Punkt, weil von dort aus zwei Wege nach W existieren, die orthogonal zu W sind.

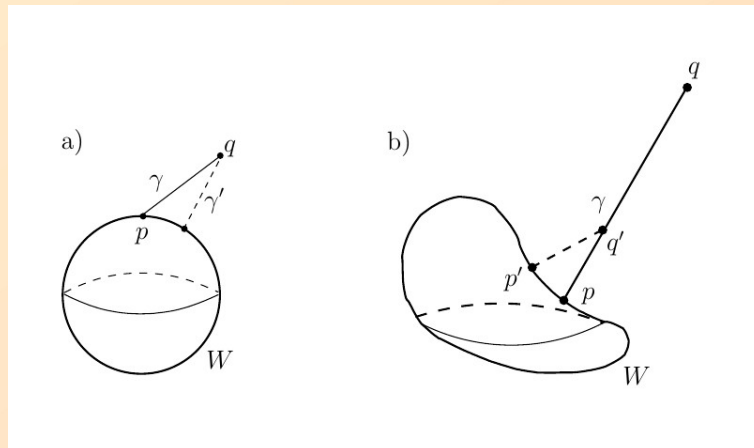


Bild 9: Light Rays, Singularities, and All That, Edward Witten,
<https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>

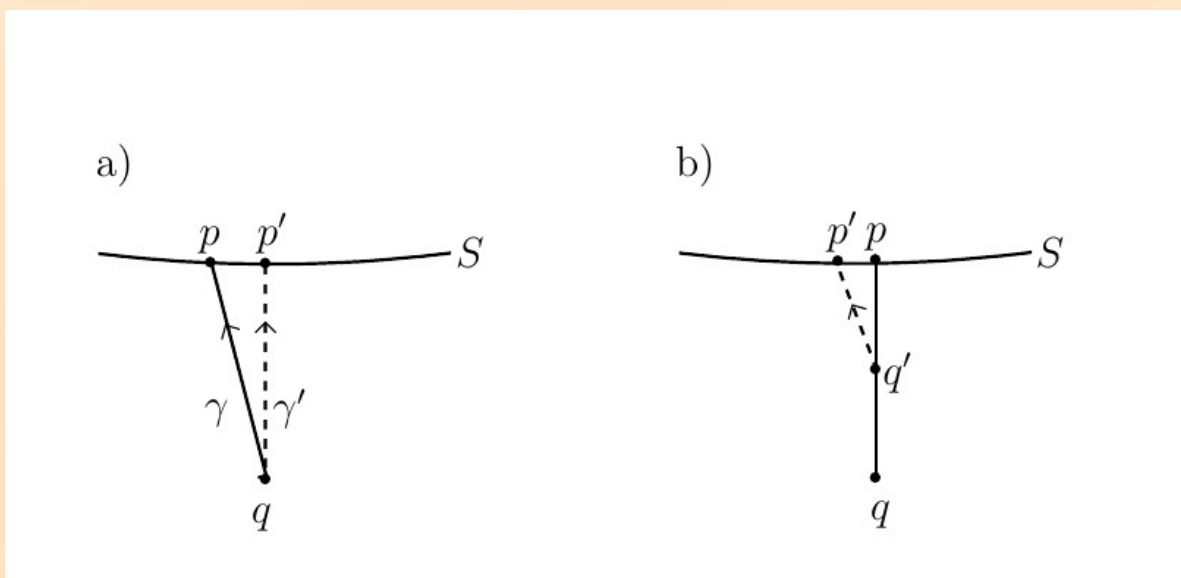


Bild 10: Light Rays, Singularities, and All That, Edward Witten,
<https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>

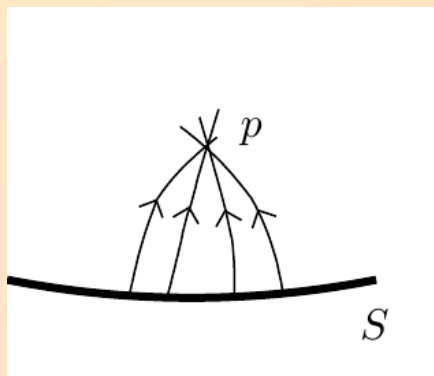
Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

In (a) muss γ in p orthogonal zu S sein, oder man variiert in S p nach p' , sodass diese Bedingung erfüllt ist. Die Eigenzeit ist für den Weg γ' an größten. Wie im Fall zuvor ist in (b) q' ein fokaler Punkt. Glättet man den Knick in der Raumzeit, so erhält man einen neuen Weg, dessen Eigenzeit größer ist als die von q nach p .

5.8.3.2 Raychaudhuri's Gleichung

Um ein Singularitätstheorem in einer Raumzeit M zu beweisen, brauchen wir eine Methode, das Vorhandensein von fokalen Punkte auf einer Geodäte nachzuweisen. Dies ist der Zweck der Gleichung von **Raychaudhuri**.

Wir betrachten eine Raumzeit M mit Cauchy-Hyperfläche S . Indem wir zeitartige Geodäten in M betrachten, die orthogonal zu S sind, ist es uns möglich, in einer Umgebung von S ein lokales Koordinatensystem zu konstruieren. Falls ein Punkt p auf einer zeitartigen Geodäte S orthogonal in \vec{x} schneidet, dann weisen wir p die Koordinaten (t, \vec{x}) , falls p in der Zukunft von S liegt und $(-t, \vec{x})$, falls p in der Vergangenheit von S liegt und t die Eigenzeit der Geodäte ist.



*Bild 11: Light Rays, Singularities, and All That, Edward Witten,
<https://www.claymath.org/sites/default/files/wittenlectures.pdf>*

Das Koordinatensystem von orthogonalen Geodäten bricht in p , dem fokalen Punkt, zusammen, weil wir nicht mehr einen eindeutigen Schnittpunkt in S zuordnen können.

Da die zeitliche Koordinatenlinie senkrecht auf S steht, steht die zeitliche Koordinatenlinie senkrecht auf den räumlichen Koordinatenlinien des so konstruierten Koordinatensystems. Deshalb gilt:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t, \vec{x}) dx^i dx^j .$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Wir hatten bei der Herleitung der Gravitationswellen schon einmal Bekanntschaft mit solch einer Metrik gemacht:

$$\begin{pmatrix} -1+f_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ 0 & f_{23} & 1+f_{33} & f_{34} \\ 0 & f_{24} & f_{34} & 1+f_{44} \end{pmatrix}$$

Die Einträge f_{ij} in der Matrix sehr klein angenommen wurden, sodass die Produkte der Einträge vernachlässigt werden können.

Ein hinreichendes Kriterium für einen fokalen oder konjugierten Punkt in der Raumzeit ist also:

$$\det g_{ij}(t, \vec{x}) = 0$$

Diese Formel ist nichts anderes als die Einstein-Gleichung:

$$R_{tt} = 8 \cdot \pi \cdot G \left(T_{tt} - \frac{1}{2} g_{tt} \cdot T^\alpha_\alpha \right)$$

Diese ausgerechnet liefert:

$$R_{tt} = -\partial_t \Gamma_{ti}^i - \Gamma_{tj}^i \cdot \Gamma_{ti}^j = -\frac{1}{2} \partial_t (g^{ik} \partial_t g_{ik}) - \frac{1}{4} (g^{ik} \partial_t g_{kj}) (g^{jm} \partial_t g_{mi}) \quad \text{oder}$$

$$R_{tt} = -\frac{1}{2} \cdot \partial_t \text{Tr } g^{-1} \dot{g} - \frac{1}{4} \text{Tr} (g^{-1} \dot{g})^2 .$$

Der Punkt über g repräsentiert die zeitliche Ableitung. Das Volumen erhält man über den metrischen

Tensor durch $V = \sqrt{\det g_{ij}}$. Dann gilt mit: $\Theta = \frac{\dot{V}}{V} = \frac{1}{2} \text{Tr } g^{-1} \cdot \dot{g}$

und $\rho_j^i = \frac{1}{2} (g^{ik} \dot{g}_{kj} - \frac{1}{d} \delta_j^i \text{Tr } g^{-1} \dot{g})$

$$R_{tt} = -\partial_t \Theta - \frac{1}{d} \Theta^2 - \text{Tr } \rho^2 .$$

ρ_j^i ist eine Matrix, dessen Spur 0 ist. Damit ist d gleich der Dimension der Raumzeit, die man betrachtet.

Setzt man $\hat{T}_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \cdot T_j^j$, dann hat die Einstein-Raychaudhuri-Gleichung

die Form:

$$\partial_t \Theta + \frac{1}{d} \Theta^2 = -\text{Tr} \rho^2 - 8 \cdot \pi \cdot G \cdot \hat{T}_{tt}$$

Definition: Die strenge Energiebedingung ist erfüllt, falls $\hat{T}_{tt} \geq 0$ gilt.

Ist diese Bedingung erfüllt, dann ist die rechte Seite der Einstein-Raychaudhuri-Gleichung negativ oder 0.

$$\dot{\Theta} + \frac{1}{d} \Theta^2 \leq 0$$

Es gilt: $\partial_t \frac{1}{\Theta} = -\frac{\dot{\Theta}}{\Theta^2}$ oder $\Theta^2 \cdot \partial_t \frac{1}{\Theta} = -\dot{\Theta}$. Mit der Ungleichung von oben liefert das:

$\Theta^2 \cdot \partial_t \frac{1}{\Theta} \geq \frac{1}{d} \cdot \Theta^2$. Damit erhalten wir eine neue Abschätzung mit:

$$\partial_t \frac{1}{\Theta} \geq \frac{1}{d}.$$

Diese Ungleichung liefert uns eine nützliche Bedingung für fokale oder konjugierte Punkte, die uns interessieren, weil dort unser Koordinatensystem zusammenbricht. Dies bedeute aber auch, dass es sich dort **nicht** unbedingt um eine Singularität handelt. Sei Θ an einem Punkt der Cauchy-

Hyperfläche kleiner 0: $\Theta = -w$ mit $w > 0$ oder $\Theta^{-1} = -\frac{1}{w}$. Die untere Grenze von

$\partial_t \frac{1}{\Theta} \geq \frac{1}{d}$ liefert dann $\frac{1}{\Theta} \geq -\frac{1}{w} + \frac{t}{d}$. Damit gilt für den Kehrwert:

$$\Theta \leq -\left(\frac{1}{w} - \frac{t}{d}\right)^{-1}.$$

Die Integration dieser Ungleichung liefert dann:

$$\log V(t) \leq d \cdot \log\left(\frac{d}{w} - t\right)$$

Damit kann ein konjugierter oder fokaler Punkt nur nach einer Eigenzeit $t \leq \frac{d}{w}$ erreicht werden.

5.8.3.3 Hawking-Singularität

Um ein Singularitätstheorem für das Universum herzuleiten, nahm Hawking an, dass das Universum global hyperbolisch ist, mit Cauchy-Hyperfläche S , und die strenge Energiebedingung erfüllt. Man muss in diesem Zusammenhang betonen, dass die Singularität eines sich ausdehnenden Universums mit positiver kosmologischer Konstante nicht mit Hawkings Argumentation hergeleitet werden kann.

Falls das Universum homogen und isotrop ist, dann enthält die Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik eine Singularität. Setzt man aber voraus, dass das Universum nicht überall homogen, aber die Hubble-Konstante überall positiv ist, kann man sich fragen, ob ein solches Universum mit dem Big Bang entstanden ist. Man kann sich in jedem Fall vorstellen, dass, wenn man den Einstein-Gleichungen in die Vergangenheit folgt, die Inhomogenitäten immer stärker werden, sodass die Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik keine gute Approximation darstellt und vielleicht das ganze Universum nicht seinen Ursprung in der Big-Bang-Singularität hat.

Das Hawking Theorem

Hawking konnte nun zeigen, dass mit den Voraussetzungen, dass das Universum:

(i) global hyperbolisch ist, mit Cauchy-Hyperfläche S ;

(ii) die strenge Energiebedingung erfüllt;

(iii) die Hubble Konstante lokal einen minimalen Wert h_{min} auf S annimmt;

Dann gibt es keinen Punkt in der Raumzeit in der Vergangenheit von S , dessen Eigenzeit größer als $\frac{1}{h_{min}}$ entlang eines kausalen Weges ist.

Beweisidee: Die Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-Metrik sei gegeben durch:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) d\vec{x}^2$$

und die Hubble-Konstante durch:

$$h = \frac{\dot{a}}{a}$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Wir können diese Metrik als einen Spezialfall der Metrik $ds^2 = -dt^2 + g_{ij}(t, \vec{x}) dx^i dx^j$ ansehen, weil $V = \sqrt{\det g} = \sqrt{a^2(t)}$ ist. Damit erhalten wir:

$$h = \frac{\dot{V}}{d \cdot V} .$$

Wegen der Voraussetzungen an die Hubble-Konstante gilt in der Zukunft: $\frac{\dot{V}}{V} \geq d \cdot h_{\min}$ und damit in der Vergangenheit:

$$\frac{\dot{V}}{V} \leq -d \cdot h_{\min} .$$

Jeder Punkt p im Universum ist mit S über einen kausalen Weg mit maximaler Eigenzeit verbunden. Dabei handelt es sich um eine zeitartige Geodäte ohne konjugierte oder fokale Punkte, die senkrecht auf S steht. Die Annahme, dass der Anfangswert auf S überall $\leq -d \cdot h_{\min}$ ist, impliziert, dass jede in die Vergangenheit gehende zeitartige Kurve orthogonal zu S einen fokalen Punkt liefert mit maximaler Eigenzeit $\frac{1}{h_{\min}}$, weil nach dem vorherigen Kapitel ein fokaler oder konjugierter

Punkt nur nach einer Eigenzeit $t \leq \frac{d}{w}$ erreicht werden kann. Setzt man für w den minimalen

Anfangswert auf S $d \cdot h_{\min}$ ein, so erhält man $t \leq \frac{1}{h_{\min}}$. Damit gibt es keinen Punkt im

Universum, der in der Vergangenheit eine größere Eigenzeit als $\frac{1}{h_{\min}}$ entlang eines kausalen Weges hat. Hawking's Theorem liefert uns also eine obere Grenze dafür, wie lange etwas in der Vergangenheit existiert hat.

Obwohl Hawking's Theorem in der Literatur als Aussage über die Big-Bang-Singularität angesehen wird, enthält es darüber keine Informationen. Betrachtet man die Raumzeit als eine Mannigfaltigkeit mit glatter Metrik von Lorentz-Signatur (Pseudometrik), dann sind Singularitätstheoreme Aussagen über die geodätische Unvollständigkeit. In diesem Sinne ist Hawking's Aussage eine Aussage über die Singularität des Universums.

Ist M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit euklidischer Signatur der Metrik, dann nennt man die Mannigfaltigkeit vollständig, falls man alle Geodäten in beiden Richtungen beliebig weit erweitern

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

kann. Hat M eine Lorentz-Signatur, dann gibt es Gleichungen für zeitartige, lichtartige und raumartige Geodäten, die man beliebig weit fortsetzen kann. Hawkings Theorem zeigt nun, dass unter bestimmten Bedingungen an die Mannigfaltigkeit M , zeitartige Geodäten unvollständig sind. Genauer: es gibt zeitartige Geodäten, die man nicht beliebig in die Vergangenheit fortsetzen kann. Dies ist nur bis zu einer oberen Grenze der Eigenzeit möglich.

5.8.3.4 Penrose Singularität

Einleitung: Die Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie erlauben Lösungen, in der die Materie so dicht in einer kleinen Region der Raumzeit komprimiert ist, sodass nichts, sogar Licht nicht, aus dieser Region entweichen kann. Das Schwarze Loch ist vom Rest der Raumzeit durch den Ereignishorizont getrennt. Alles, was diese Grenze überschreitet, wird unwiderruflich in das Zentrum des Schwarzen Lochs fallen.

Was Schwarze Löcher noch unangenehmer macht, ist, dass in Zentrum des Schwarzen Lochs eine Singularität existiert, an der die Gravitation unendlich groß wird. Jedes Objekt, dass dieses Zentrum erreicht, wird aufhören zu existieren.

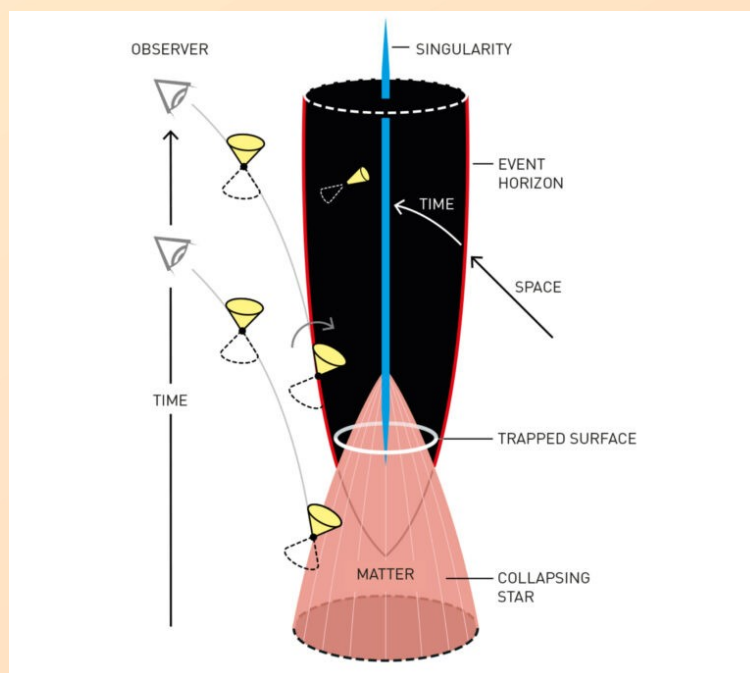


Illustration basierend auf einem Penrose-Diagramm, die den Gravitationskollaps und das Herausbilden einer Singularität in einer «trapped surface» zeigt. ©Johan Jarnestad / The Royal Swedish Academy of Sciences

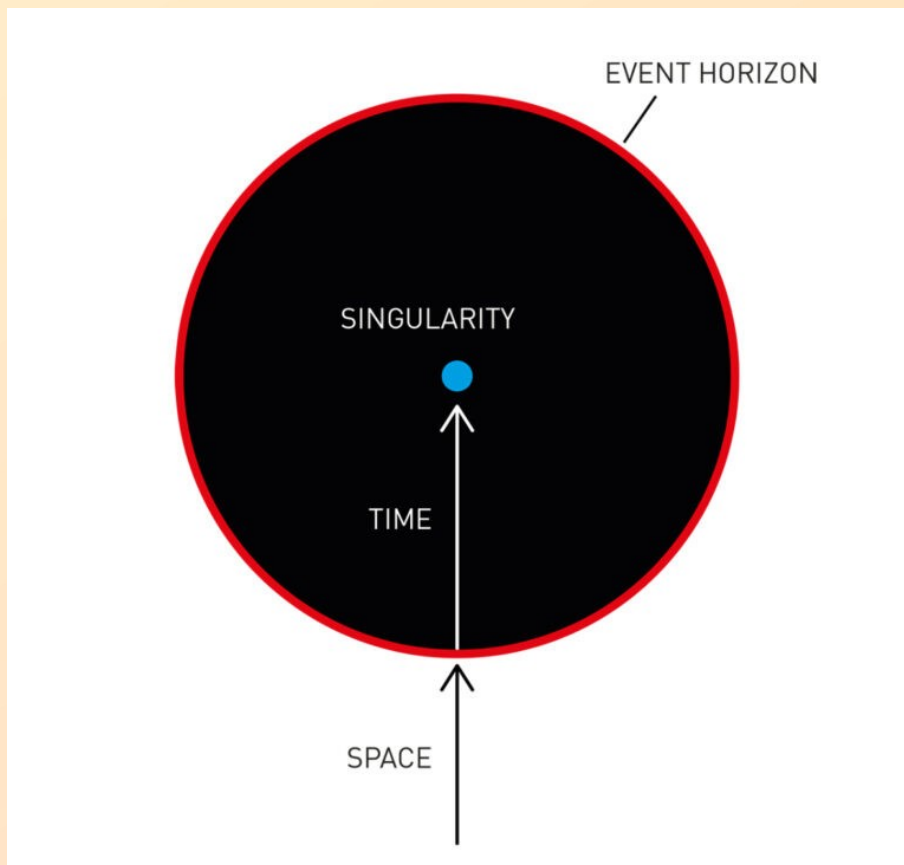


Illustration eines Schwarzen Lochs mit der Singularität im Innern. ©Johan Jarnestad / The Royal Swedish Academy of Sciences

Bis zu der Arbeit von Penrose war es unklar, ob Schwarze Löcher und Singularitäten in der Natur existieren oder nur ein mathematisches Artefakt der Allgemeinen Relativitätstheorie sind. Bis dahin benötigten alle Lösungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, die zu Schwarzen Löchern führen, eine perfekte symmetrische Anordnung, die man in der Natur so nicht beobachten kann.

Viele Physiker waren deshalb der Meinung, dass es Schwarze Löcher in der realen Welt nicht gibt. Stellt man sich vor, wie Schwarze Löcher entstehen könnten, so benötigt man genug Materie und Energie in einer kleinen Region, dass die Gravitationskraft stärker ist als jede nur mögliche abstoßende Kraft, die den Gravitationskollaps verhindern kann. Dieser wurde zum ersten Mal von Robert Oppenheimer und Snyder 1939 unter idealen symmetrischen Bedingungen einer Gaswolke hergeleitet, die in dieser Weise niemals in der Natur beobachtet wurde.

Penrose konnte zeigen, dass sich Singularitäten und die damit verbundenen Schwarzen Löcher auch ohne zusätzliche Annahmen an die Symmetrie der Materie aus der Allgemeinen Relativitätstheorie ableiten lassen. Dabei untersuchte er, wie die Gravitation Licht beeinflusst. Ein schweres Objekt erzeugt einen Gravitationslinseneffekt, der die Lichtstrahlen, die an dem Objekt vorbeilaufen, in

einem Brennpunkt bündelt, sodass das Licht z. B. einer Galaxie auf verschiedenen Wegen zum Beobachter gelangen kann, der dann mehrere Bilder dieser Galaxie sieht.

Wenn die Gravitation stark genug ist, dann erzeugt die Gravitationslinse eine sogenannte «trapped surface» in der Raumzeit. Penrose nutzte Mathematik und Topologie, um das Konzept einer «gefangenen Oberfläche» zu entwickeln. Eine solche Oberfläche ist ein zweidimensionales, geschlossenes Gebilde – ähnlich einem Ring (siehe Abb.), die alle Strahlung nach innen auf das Zentrum zu zwingt. Im Inneren dieses Rings, so erkannte Penrose, liegt dann immer eine Singularität, ein Punkt, in dem die Zukunft der Lichtstrahlen endet, weil sie nicht mehr eindeutig fortgesetzt werden können oder an dem Raum und Zeit nicht mehr definierbar sind. Dieses von Penrose 1965 veröffentlichte Konzept erklärt, warum Licht und Materie den Ereignishorizont eines Schwarzen Lochs nur in eine Richtung passieren können – nach innen (siehe Abb.). Denn, wie Penrose feststellte, tauschen Raum und Zeit im Inneren dieser gefangenen Oberfläche ihre Rollen. Dadurch wird die Bewegung nach Innen zur Vorwärtsbewegung in der Zeit. Genau dies macht eine Rückkehr aus dem Schwarzen Loch unmöglich, weil es eine Zeitreise in die Vergangenheit wäre.

Die Penrose Singularität bedeutet, dass, wenn alle Materie eine positive Energiedichte hat, bekannt als schwache Energiebedingung, eine «trapped surface» notwendigerweise das Vorhandensein einer Singularität impliziert. In dem Szenario von Oppenheimer und Snyder existiert eine «trapped surface», und diese bleibt bestehen, auch wenn man die symmetrische Anordnung der Materie stört.

Weil Penrose für das Singularitätstheorem nur minimale Voraussetzungen benötigt, kann man zeigen, dass in vielen Fällen in der Allgemeinen Relativitätstheorie Singularitäten entstehen. Dazu ist es nicht notwendig, dass man einen Ereignishorizont so wie bei Schwarzen Löchern hat. Es zeigt sich, dass die Raumzeit auch Singularitäten aufweisen kann, die sich nicht in Schwarzen Löchern verstecken. Penrose hat deshalb diese nackten Singularitäten durch seine Vermutung der kosmischen Zensur nicht zugelassen. Obwohl diese Vermutung bis heute nicht bewiesen ist, geht man allgemein davon aus, dass sich Singularitäten hinter einem Ereignishorizont verstecken und somit vom Rest der Raumzeit abgeschirmt sind.

Herleitung

Lokale Koordinaten: Im Folgenden sei M eine global hyperbolische Raumzeit mit Cauchy-Hyperfläche S . S habe als Hyperfläche ein in die Zukunft weisendes Normalenfeld \vec{n} und Σ sei eine kompakte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit mit Normalenfeld \vec{o} in S . Für jeden Punkt p in Σ kann man dann eine glatte Abbildung $\exp: (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma \rightarrow M$ definieren mit $\exp(r, p) = c_p(r)$, wobei c_p die Nullgeodäte mit Anfangsbedingung $\vec{n} + \vec{o}$ ist. Kritische Werte von \exp sind konjugierte Punkte von Σ . Dabei handelt es sich um Punkte, an denen sich Geodäten, die orthogonal an nahe gelegenen Punkten von Σ starten, schneiden.

Sei Φ eine lokale Parametrisierung von Σ mit Koordinaten (x^2, x^3) und $q = \exp(r_0, p)$ ein Punkt in M , der nicht konjugiert zu Σ ist, dann kann man über die Abbildung: $(u, r, x^2, x^3) \rightarrow \exp(r, \Psi_u(\Phi(x^2, x^3)))$ lokale Koordinaten in einer offenen Umgebung U von q definieren. Dabei ist Ψ_u der Fluss entlang zeitartiger Geodäten orthogonal zu S . Mit diesen Koordinaten erhält man folgenden metrischen Tensor:

$$\begin{pmatrix} \alpha & -1 & \beta_2 & \beta_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \beta_3 & 0 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}.$$

Für die Determinante erhält man durch Entwicklung nach der 2. Zeile:

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \beta_2 & \beta_3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \beta_3 & 0 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & \beta_2 & \beta_3 \\ 0 & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ 0 & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{pmatrix}$$

Hat man eine globale hyperbolische Raumzeit, die die Null-Energie-Bedingung erfüllt⁵³ ($\text{Ric}(V, V) \geq 0$ für alle Null-Vektorfelder V), $S \subset M$ eine Cauchy-Hyperfläche und Σ eine kompakte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit mit einem Einheits-Normalen-Vektorfeld m von S und $p \in S$ wo $\Theta = \Theta_0 < 0$ ist. Dann enthält die Nullgeodäte c_p mindestens einen konjugierten Punkt zu Σ .

Beweis:

Die Einstein-Raychaudhuri-Gleichung mit $d=2$ lautet dann: $\frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{2} \Theta^2 \leq 0$.

$$\Theta^{-2} \partial \Theta \leq -\frac{1}{2} \partial r \quad \text{Integration} \quad -\frac{1}{\Theta} + \frac{1}{\Theta_0} \leq -\frac{r}{2} \quad \frac{1}{\Theta} \geq \frac{1}{\Theta_0} + \frac{r}{2}.$$

⁵³ Siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Energiebedingung>

Ist $r = -\frac{2}{\Theta_0}$ erhält man: $\frac{1}{\Theta} = 0$ was nur für $\Theta = \infty$ sein kann. Dies bedeutet, dass die Determinante oder das Flächenelement 0 ist und damit die Nullgeodäte c_p mindestens einen konjugierten Punkt in Σ hat.

□

Die Menge $I^+(p)$ für $p \in M$ und M globale hyperbolische Raumzeit ist die Menge aller Punkte $q \in M$, die man mit einer zukunftsorientierten zeitartigen Kurve verbinden kann. Man schreibt dann: $p \ll q$.

Die Menge $J^+(p)$ für $p \in M$ und M globale hyperbolische Raumzeit ist die Menge aller Punkte $q \in M$, die man mit einer zukunftsorientierten nicht raumartigen Kurve verbinden kann. Man schreibt dann: $p < q$.

Für die kompakte Oberfläche Σ setzt man $I^+(\Sigma) = \bigcup_{p \in \Sigma} I^+(p)$ und $J^+(\Sigma) = \bigcup_{p \in \Sigma} J^+(p)$.

Für $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$ ist jede zukunftsorientierte, nicht raumartige Kurve eine reparametrisierte Nullgeodäte.

Mit folgenden Definitionen:

- Sei (M, g) eine global hyperbolische Raumzeit und S eine Cauchy-Hyperfläche mit einem in die Zukunft gerichteten Normalenvektorfeld n . Eine kompakte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit $\Sigma \subset S$ mit Normalenvektorfeld m in S nennt man *trapped*, falls die Erweiterungen Θ^+, Θ^- von Nullgeodäten mit Anfangsbedingung $n + m$ bzw. $n - m$ beide negativ auf Σ sind. Die Teilmenge $\Sigma \subset S$ nennt man *anti-trapped*, falls die Erweiterungen Θ^+, Θ^- von Nullgeodäten mit Anfangsbedingung $n + m$ bzw. $n - m$ beide positiv auf Σ sind;
- Eine Raumzeit (M, g) nennt man *singulär*, wenn sie nicht geodätisch vollständig ist;

kann man dann das Singularitätstheorem von Penrose beweisen:

Sei (M, g) eine zusammenhängende, globale, hyperbolische Raumzeit mit einer nicht kompakten Cauchy-Hyperfläche S , die die Null-Energie-Bedingung erfüllt. Enthält S eine trapped Oberfläche Σ , dann ist (M, g) singulär.

Dazu benötigt man folgenden Hilfssatz:

Sei (M, g) eine globale hyperbolische Raumzeit, S eine Cauchy-Hyperfläche mit einem in die Zukunft zeigenden Normalenvektorfeld n , $\Sigma \subset S$ eine kompakte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit von M mit Einheits-Normalen-Vektorfeld m in S , $p \in \Sigma$, c_p eine Nullgeodäte durch p mit Anfangsbedingung $n_p + m_p$ und $q = c_p(r)$ für $r > 0$. Falls c_p einen konjugierten Punkt zwischen p und q hat, dann ist $q \in I^+(\Sigma)$.

Beweis:

Sei s der erste konjugierte Punkt entlang c_p . Sei α eine Nullgeodäte von $\Sigma \subset S$ nach s . Wir betrachten den Weg, der in $\Sigma \subset S$ startet und entlang α bis s verläuft. Danach gehen wir entlang c_p weiter bis q . Diesen Weg kann man in s glätten und man erhält damit, dass der Punkt $q \in I^+(\Sigma)$ ist, wie behauptet.

Beweisskizze des Singularitätstheorems:

Sei $t: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine globale Zeitfunktion, sodass $S = t^{-1}(0)$ ist. Die Integralkurve⁵⁴ von $\text{grad } t$ schneidet S genau einmal und $\partial I^+(\Sigma)$ höchstens einmal. Nimmt man nun an, dass es eine in die Zukunft gerichtete Nullgeodäte orthogonal zu Σ gibt, die man durch einen affinen Parameter größer als $r_0 = -\frac{2}{\Theta_0}$ in die Zukunft von Σ erweitern kann, so kann man im Widerspruch zur Voraussetzung zeigen, dass S kompakt ist. Dazu definiert man eine stetige, injektive Abbildung $\pi: \partial I^+(\Sigma) \rightarrow S$, deren Bild offen ist. Daraus folgt, dass $\partial I^+(\Sigma)$ kompakt ist und damit das Bild von $\pi: \partial I^+(\Sigma) \rightarrow S$ ebenfalls kompakt. Wegen des Zusammenhangs von M folgt, dass das Bild von $\pi: \partial I^+(\Sigma) \rightarrow S$ gleich S und damit kompakt ist.

□

⁵⁴ Siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Integralkurve>

5.8.4 Der Metriktensor rotierender und nicht rotierender Schwarzen Löcher

5.8.4.1 Die Schwarzschildmetrik

Rotieren die Schwarzen Löcher nicht, so erhält man die **Schwarzschildmetrik** für ungeladene

Schwarze Löcher mit: $g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} -(1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$, wie wir es schon

zuvor gesehen haben.

Setzt man $\tau = \frac{2 \cdot M}{r}$, so kann man die Metrik auch folgendermaßen schreiben:

$$g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} -(1 - \tau) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} . \text{ Mit } d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\Phi^2 \text{ hat man dann}$$

folgendes Linienelement in Kugelkoordinaten:

$$ds^2 = -(\tau - 1) \cdot dt^2 + \frac{1}{1 - \tau} dr^2 + r^2 \cdot d\Omega^2 .$$

Die inverse Bilinearform ist durch folgende Matrix gegeben:

$$g^{ij}(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2m-x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2m-x}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^2 \sin(y)^2} \end{pmatrix}$$

In der Metrik wurde $G=c=1$ gesetzt, sodass $2M$ dem Schwarzschildradius $r_s = \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}$ entspricht.

Der Riccitensor und der Ricciskalar verschwinden, sodass der Einsteintensor ebenfalls verschwindet.

Der Einsteintensor kann man über SageMath mit folgendem Skript berechnen.

```
# Einsteintensor der Schwarzschildmetrik ungeladenes Schwarzes
Loch
version()
M = Manifold(4, 'M', structure='Lorentzian')
fr.<t,x,y,z> = M.chart(r't x y z')
var ('m', domain='real')
g=M.metric()
g[0,0]=- (1-2*m/x)
g[1,1]=1/(1-2*m/x)
g[2,2]=x^2
g[3,3]=x^2*(sin(y))^2
latex(g[:])
h=g.inverse()
latex(h[:])
nabla = g.connection()
latex(g.christoffel_symbols_display())
Ricci = nabla.ricci()
latex (Ricci[:])
Ricci_scalar= g.ricci_scalar()
latex(Ricci_scalar.display())
G = FiniteRankFreeModule(RR, 4, name='G')
t = G.tensor((1,1), name='t')
t.parent()
t.parent() is G.tensor_module(1,1)
t in G.tensor_module(1,1)
e = G.basis('e'); e
ii = [0,1,2,3]
jj = [0,1,2,3]
for i in ii:
    for j in jj:
        t[i,j]=Ricci[i,j]+0.5*Ricci_scalar*g[i,j]
latex(t[:])
```

Die Ausgabe kann man dann mit TextWorks weiter bearbeiten

```
% \documentclass[8pt a3paper]{article}
\documentclass{scrartcl}

\usepackage{amsmath}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{hyperref}
\usepackage[latin1]{inputenc}
```

```
% \documentclass[8pt a3paper]{article}

\documentclass{scrartcl}

\usepackage{amsmath}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{hyperref}
\usepackage[latin1]{inputenc}
% \usepackage[ngerman]{babel}
\usepackage{pdfpages}

\KOMAOptions{paper=A1,paper=landscape,pagesize}
\recalctypearea

\title{Einsteinensor Schwarzschild}
\author{Gunter Opitz-Ohlsen}
\date{03.04.2024}
\begin{document}
\section{Schwarzschild}

$$\left(\begin{array}{rrrr} \frac{2}{m} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\frac{2m}{r} - 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{array}\right)$$

\section{Inverse Schwarzschild-Metrik}

$$\left(\begin{array}{rrrr} \frac{r}{2m - r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2m - r}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \end{array}\right)$$

\section{Christoffel Symbole}

$$\begin{array}{l} \Gamma_{\phantom{\lambda} \phantom{\mu} \phantom{\nu}}^{\phantom{\lambda} \phantom{\mu} \phantom{\nu}} = \\ \Gamma_{\phantom{\lambda} \phantom{\mu} \phantom{\nu}}^{\phantom{\lambda} \phantom{\mu} \phantom{\nu}} = \\ \Gamma_{\phantom{\lambda} \phantom{\mu} \phantom{\nu}}^{\phantom{\lambda} \phantom{\mu} \phantom{\nu}} = \\ \Gamma_{\phantom{\lambda} \phantom{\mu} \phantom{\nu}}^{\phantom{\lambda} \phantom{\mu} \phantom{\nu}} = \\ \Gamma_{\phantom{\lambda} \phantom{\mu} \phantom{\nu}}^{\phantom{\lambda} \phantom{\mu} \phantom{\nu}} = \end{array}$$


```

```

\phantom{\, y} \} & = & \frac{1}{x} \, \Gamma_{\phantom{\, y} \, z \, z}^{\phantom{\, y} \, y \phantom{\, z} } \\
\phantom{\, z} \} & = & -\cos(y) \sin(y) \, \Gamma_{\phantom{\, z} \, x \, z}^{\phantom{\, z} \, z \phantom{\, x} } \\
\phantom{\, x} \phantom{\, z} \} & = & \frac{1}{x} \, \Gamma_{\phantom{\, z} \, y \, z}^{\phantom{\, z} \, z \phantom{\, y} } \\
z \phantom{\, y} \phantom{\, z} \} & = & \frac{\cos(y)}{\sin(y)} \end{array}
\section{Riccitensor}
$\left(\begin{array}{rrrr}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$
\section{Riciscalar}
$\begin{array}{l} \left(t, x, y, z\right) \mapsto 0 \end{array}$
\end{document}

```

Man erhält dann folgendes PDF-File als Ausgabe.

Einsteintensor

1 Schwarzschild

$$\begin{pmatrix} \frac{2m}{x} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\frac{2m}{x} - 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \sin^2(y) \end{pmatrix}$$

2 Inverse Schwarzschild-Metrik

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{2m-x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2m-x}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^2 \sin^2(y)} \end{pmatrix}$$

3 Christoffel Symbole

$$\begin{aligned}
 \Gamma^t_{tx} &= -\frac{m}{2mx-x^2} \\
 \Gamma^x_{tt} &= -\frac{2m^2-mx}{x^3} \\
 \Gamma^x_{xx} &= \frac{m}{2mx-x^2} \\
 \Gamma^x_{yy} &= 2m-x \\
 \Gamma^x_{zz} &= (2m-x)\sin(y)^2 \\
 \Gamma^y_{xy} &= \frac{1}{x} \\
 \Gamma^y_{zz} &= -\cos(y)\sin(y) \\
 \Gamma^z_{xz} &= \frac{1}{x} \\
 \Gamma^z_{yz} &= \frac{\cos(y)}{\sin(y)}
 \end{aligned}$$

4 Riccitenor

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5 Ricciscalar

$$(t, x, y, z) \longmapsto 0$$

5.8.4.1.1 Zeitdilatation Schwarzschildmetrik

$$\tau = \sqrt{|g^{tt}|} = \sqrt{\left| \frac{r}{2 \cdot M - r} \right|} = \sqrt{\left| \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} \right|}$$

ist die gravitative Zeitdilatation der Schwarzschild-Metrik in einem stärkeren Gravitationsfeld verläuft die Zeit langsamer als in einem schwächeren Gravitationsfeld. Sie steht in Beziehung zur Fluchtgeschwindigkeit $v_{\text{Flucht}} = \frac{\sqrt{\tau^2 - 1}}{\tau}$ eines ungeladenen Partikels. Der folgende Plot bezieht sich auf Radien in Einheiten eines Gravitationsradius $r_g = \frac{G \cdot M}{c^2}$, also $G = c = M = 1$. Man sieht sehr deutlich die Polstelle am Ereignishorizont beim Schwarzschildradius $r_s = 2 \cdot r_g$ mit der Zeitdilatation $\tau = t_\infty$.

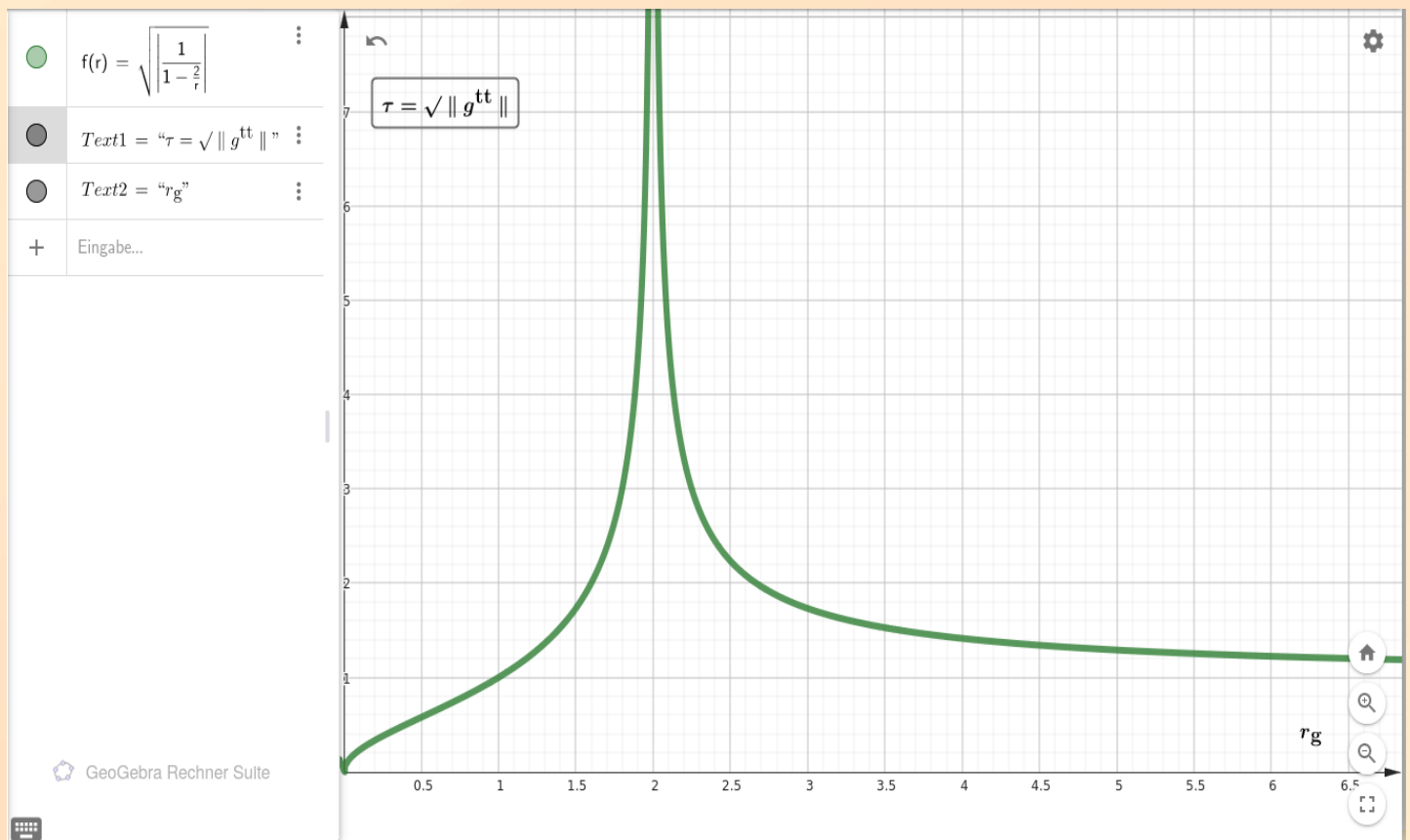


Abb. Ereignishorizont Schwarzschildmetrik, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Es gilt $\lim_{\tau \rightarrow \infty} v(\tau) = 1$ bedeutet, dass am Ereignishorizont die Lichtgeschwindigkeit die Fluchtgeschwindigkeit ist. $\lim_{r \rightarrow \infty} \tau(r) = 1$ bedeutet, dass man sich unendlich weit weg vom Schwarzen Loch im gravitationsfreien Raum befindet. Dort gibt es dann keine Fluchtgeschwindigkeit, um dem Schwarzen Loch zu entkommen.

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

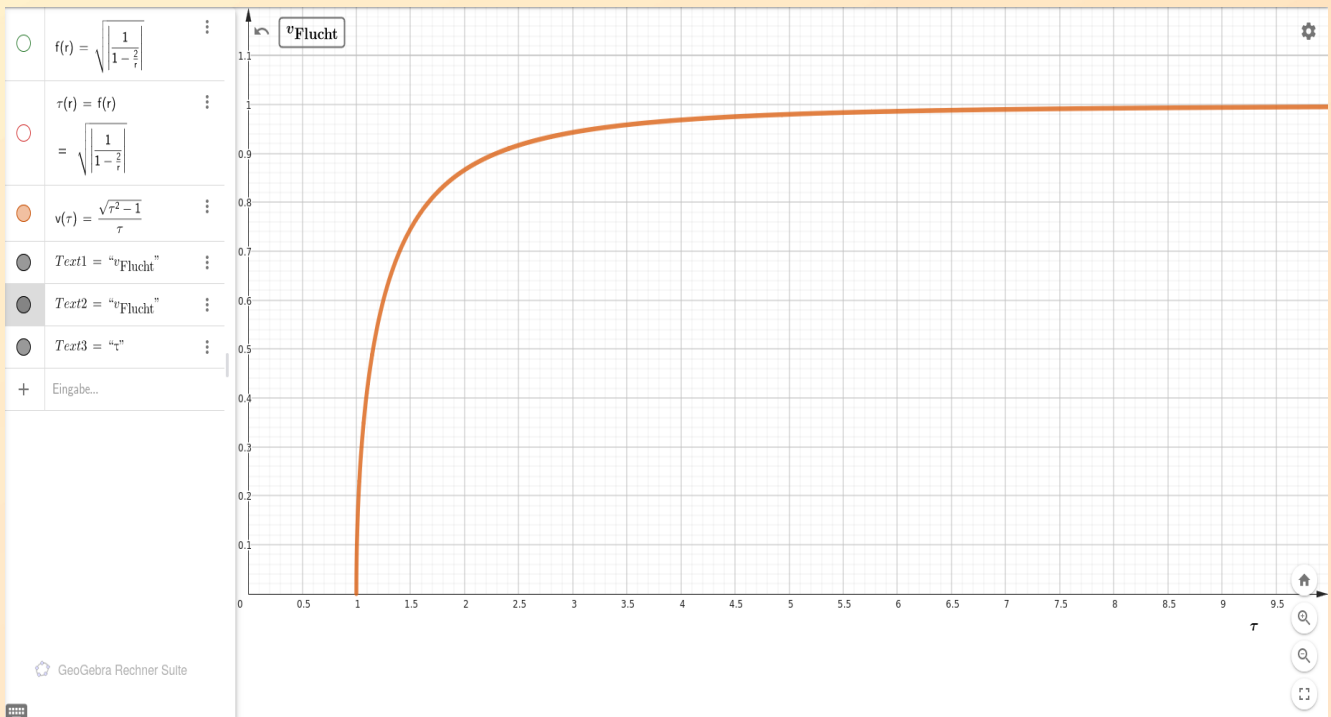
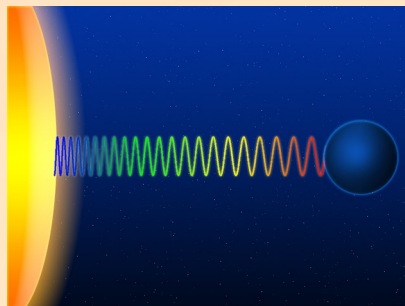


Abb. Fluchtgeschwindigkeit Schwarzschildmetrik, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

Man nennt den Ausdruck $z = \sqrt{\left| \frac{1}{1 - \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2 \cdot r}} \right|} - 1$ die Rotverschiebung eines im Abstand r von der Masse M

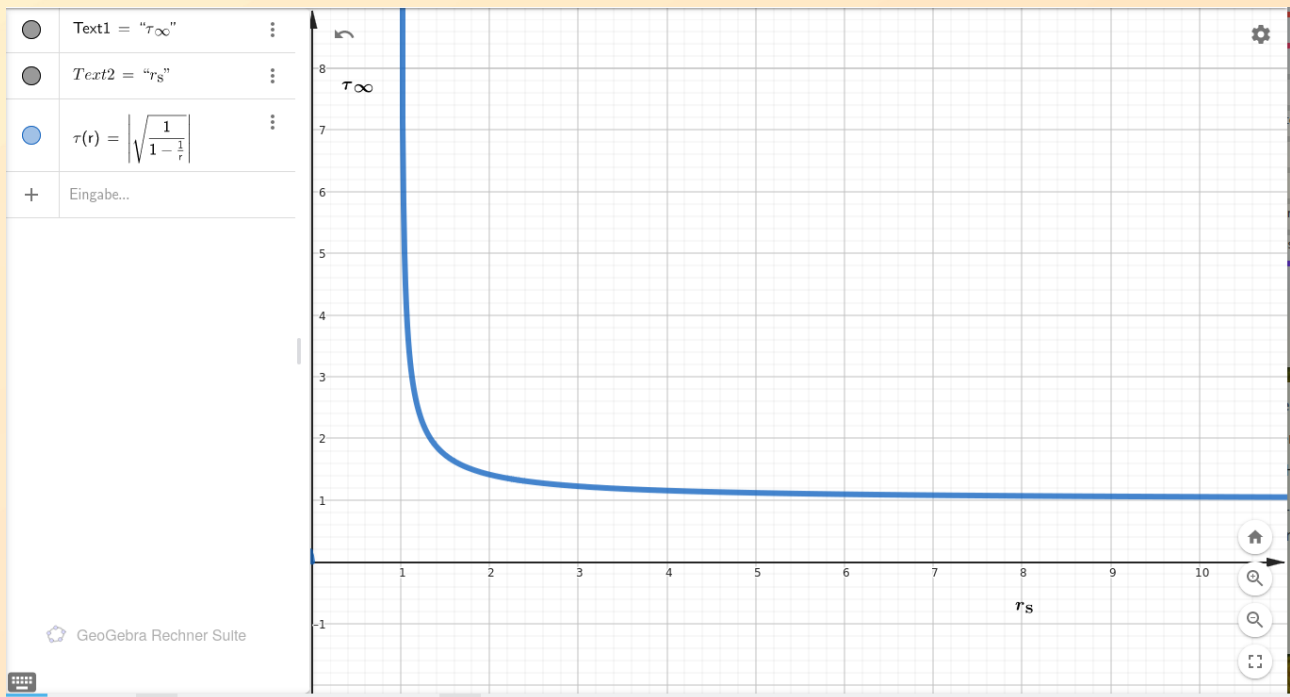
emittierten Lichtstrahls. Sie ist allgemein wie folgt definiert: $z = \frac{\lambda_a - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\lambda_a}{\lambda_e} - 1$. Dabei ist λ_e die Wellenlänge des ausgestrahlten Lichtes im Abstand r von der Masse M und λ_a die Wellenlänge des absorbierten Lichts, das von einem Beobachter im Unendlichen empfangen wird. Dies gilt auch für die Masse beliebiger Sterne, also nicht nur für Schwarze Löcher. Man nennt sie gravitative Rotverschiebung. Entwickelt man den Wurzel Ausdruck in eine Taylorreihe, dann ergibt sich mit $\kappa = \frac{G \cdot M}{c^2 \cdot r}$ für z : $z = \kappa + \frac{3}{2} \kappa^2 + \frac{5}{2} \kappa^3 + \dots$. Da für kleine Massen wie zum Beispiel die

Masse der Erde κ sehr klein wird, erhält man als Näherung: $z = \frac{G \cdot M_E}{c^2 \cdot r}$ für die Rotverschiebung von im Abstand r vom Erdmittelpunkt emittierten Lichts.



Aus: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5c/Gravitational_red-shifting.png

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version



Rotverschiebung von emittierten Licht bei einem Schwarzen Loch mit Schwarzschildmetrik. Bei $r = 1$ liegt der Ereignishorizont von einem Schwarzschildradius r_s . Mit $\tau = \frac{\lambda_a}{\lambda_e}$ wird das Verhältnis zwischen den Wellenlängen festgelegt.

Beispiel: Wird Licht aus einer Entfernung von 1,2 Schwarzschildradien mit einer Wellenlänge λ_e emittiert, dann absorbiert ein theoretischer Beobachter im leeren Raum, der sich unendlich weit vom Schwarzen Loch befindet, Licht mit ca. 2,5 facher Wellenlänge. Je näher die Lichtquelle am Ereignishorizont liegt, desto größer wird die Rotverschiebung. Am Ereignishorizont wird die Rotverschiebung ∞ . Beim Beobachter kommt also kein Licht mehr an, egal wie weit er sich vom Ereignishorizont befindet.

Gravitative Rotverschiebung verschiedener Himmelsobjekte für einen Beobachter im Unendlichen

| Planet/Stern | Rotverschiebung | Stern | Rotverschiebung |
|--------------|----------------------|------------------------------------|---------------------|
| Erde | $7,0 \cdot 10^{-10}$ | Naos | $6,2 \cdot 10^{-6}$ |
| Jupiter | $2,0 \cdot 10^{-8}$ | Sirius B | $2,4 \cdot 10^{-4}$ |
| Mira | $6,4 \cdot 10^{-9}$ | BPM 37093 | $8,0 \cdot 10^{-4}$ |
| Beteigeuze | $4,3 \cdot 10^{-8}$ | Neutronenstern mit $1,4 M_{\odot}$ | 0,24 |
| Pollux | $4,3 \cdot 10^{-7}$ | Neutronenstern mit $1,8 M_{\odot}$ | 0,34 |
| Sonne | $2,1 \cdot 10^{-6}$ | Schwarzes Loch, Ereignishorizont | unendlich |

https://de.wikipedia.org/wiki/Rotverschiebung#Gravitative_Rot- und Blauverschiebung_in_der_speziellen_Relativit%C3%A4tstheorie

5.8.4.2 Die Reissner⁵⁵-Nordström⁵⁶-Metrik

Diese Metrik beschreibt das Linienelement für geladene, nicht rotierende Schwarze Löcher:

$$g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \frac{2Mr - Q^2}{r^2} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{Q^2 + r^2 - 2Mr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Die inverse Bilinearform ist durch folgende Matrix gegeben:

Der

$$g^{ij}(t, x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{x^2}{Q^2 - 2mx + x^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Q^2 - 2mx + x^2}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^2 \sin(y)^2} \end{pmatrix}$$

Ricci-Tensor ist dann:

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{Q^4 - 2Q^2mx + Q^2x^2}{x^6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q^2}{Q^2x^2 - 2mx^3 + x^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q^2}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q^2 \sin(y)^2}{x^2} \end{pmatrix}$$

und der Ricciskalar verschwindet:

$$R^r{}_r(g) : M \longrightarrow R \\ (t, x, y, z) \longmapsto 0$$

Der Einsteintensor ist also gleich dem Ricci-Tensor. Hier nochmals die Zusammenfassung der Ergebnisse aus SageMath.

⁵⁵ https://de.wikipedia.org/wiki/Hans_Jacob_Reissner

⁵⁶ https://de.wikipedia.org/wiki/Gunnar_Nordstr%C3%B6m

```
#Einstein Tensor Reissner-Nordström
version()
M = Manifold(4, 'M', structure='Lorentzian')
fr.<t,x,y,z> = M.chart(r't x y z')
var ('rs m Q a', domain='real')
g00(x,y)=(2*m*x-Q^2)/(x*x) -1
g11(x,y)=(x^2)/(Q^2+x^2-2*m*x)
g22(x,y)=x^2
g33(x,y)=x^2*(sin(y))^2
g=M.metric()
g[0,0]=g00(x,y)
g[1,1]=g11(x,y)
g[2,2]=g22(x,y)
g[3,3]=g33(x,y)
print("Reissner-Nordström");
latex(g[:])Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei
h=g.inverse()
print("Inverse Reissner-Nordström-Metrik");
latex(h[:])
nabla = g.connection()
print("Christoffel Symbole");
latex(g.christoffel_symbols_display())
Ricci = nabla.ricci()
print("Ricci tensor");
latex (Ricci[:])
Ricci_scalar= g.ricci_scalar()
print("Ricci scalar");
latex(Ricci_scalar.display())
```

Mit dem Ausdruck kann man folgendes LatexSkript erzeugen

```
% \documentclass[8pt a3paper]{article}
\documentclass{scrartcl}

\usepackage{amsmath}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{hyperref}
\usepackage[latin1]{inputenc}
% \usepackage[ngerman]{babel}
\usepackage{pdfpages}

\KOMAOPTIONS{paper=A1,paper=landscape,pagesize}
\reacalctypearea

\title{Einstein tensor Reissner-Nordström-Metrik}
\author{Günter Opitz-Ohlsen}
```

```

\date{03.04.2024}
\begin{document}
\section{Reissner-Nordstroem}
$\left(\begin{array}{rrrr}
-\frac{Q^2}{2} - 2 \, m x \{x^2\} - 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{x^2}{Q^2 - 2 \, m x + x^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & x^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & x^2 \sin\left(y\right)^2
\end{array}\right)$
\section{Inverse Reissner-Nordstroem-Metrik}
$\left(\begin{array}{rrrr}
-\frac{x^2}{Q^2 - 2 \, m x + x^2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{Q^2 - 2 \, m x + x^2}{x^2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{x^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^2 \sin\left(y\right)^2}
\end{array}\right)$
\section{Christoffel Symbole}
$\begin{array}{lcl} \Gamma_{\phantom{\,} \, t \, \, x}^{\phantom{\,} \, t \, \, t} & = & -\frac{Q^2}{2} - m x \{Q^2 x - 2 \, m x^2 + x^3\} \\ \Gamma_{\phantom{\,} \, t \, \, x}^{\phantom{\,} \, x \, \, t} & = & -\frac{Q^4}{3} - 3 \, Q^2 m x - m x^3 + \left(Q^2 + 2 \, m^2\right) x^2 \\ \Gamma_{\phantom{\,} \, x \, \, x}^{\phantom{\,} \, x \, \, x} & = & \frac{Q^2 - m x}{Q^2 x - 2 \, m x^2 + x^3} \\ \Gamma_{\phantom{\,} \, x \, \, y}^{\phantom{\,} \, y \, \, y} & = & -\frac{Q^2 - 2 \, m x + x^2}{x} \\ \Gamma_{\phantom{\,} \, x \, \, z}^{\phantom{\,} \, z \, \, z} & = & -\frac{\left(Q^2 - 2 \, m x + x^2\right) \sin\left(y\right)^2}{x} \\ \Gamma_{\phantom{\,} \, y \, \, x}^{\phantom{\,} \, x \, \, y} & = & \frac{1}{x} \\ \Gamma_{\phantom{\,} \, y \, \, z}^{\phantom{\,} \, z \, \, z} & = & -\cos\left(y\right) \sin\left(y\right) \\ \Gamma_{\phantom{\,} \, z \, \, x}^{\phantom{\,} \, x \, \, z} & = & \frac{1}{x} \\ \Gamma_{\phantom{\,} \, z \, \, y}^{\phantom{\,} \, y \, \, z} & = & \frac{\cos\left(y\right)}{\sin\left(y\right)} \end{array}$
\section{Ricci tensor}
$\left(\begin{array}{rrrr}
\frac{Q^4}{2} - 2 \, Q^2 m x + Q^2 x^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{Q^2}{2} x^2 - 2 \, m x^3 + x^4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{Q^2}{x^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{Q^2 \sin\left(y\right)^2}{x^2}
\end{array}\right)$
\section{Ricci scalar}
$\begin{array}{lcl} \left(t, x, y, z\right) & \mapsto & 0 \end{array}$
\end{document}

```


Die Umwandlung mit TexWorks liefert folgendes PDF-File.

1 Reissner-Nordstroem

$$\begin{pmatrix} -\frac{Q^2-2mx}{x^2} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x^2}{Q^2-2mx+x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \sin(y)^2 \end{pmatrix}$$

2 Inverse Reissner-Nordstroem-Metrik

$$\begin{pmatrix} -\frac{x^2}{Q^2-2mx+x^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Q^2-2mx+x^2}{x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x^2 \sin(y)^2} \end{pmatrix}$$

3 Christoffel Symbole

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tx} &= -\frac{Q^2-mx}{Q^2x-2mx^2+x^3} \\ \Gamma^x_{tt} &= -\frac{Q^4-3Q^2mx-mx^3+(Q^2+2m^2)x^2}{x^5} \\ \Gamma^x_{xx} &= \frac{Q^2-mx}{Q^2x-2mx^2+x^3} \\ \Gamma^x_{yy} &= -\frac{Q^2-2mx+x^2}{Q^2x-2mx^2+x^3} \\ \Gamma^x_{zz} &= -\frac{(Q^2-2mx+x^2)\sin(y)^2}{x} \\ \Gamma^y_{xy} &= \frac{1}{x} \\ \Gamma^y_{zz} &= -\cos(y)\sin(y) \\ \Gamma^z_{xz} &= \frac{1}{x} \\ \Gamma^z_{yz} &= \frac{\cos(y)}{\sin(y)} \end{aligned}$$

4 Riccitenor

$$\begin{pmatrix} \frac{Q^4 - 2 Q^2 m x + Q^2 x^2}{x^6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{Q^2}{Q^2 x^2 - 2 m x^3 + x^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Q^2}{x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{Q^2 \sin(y)^2}{x^2} \end{pmatrix}$$

5 Ricciscalar

$$(t, x, y, z) \longmapsto 0$$

5.8.4.2.1 Zeitdilatation der Reissner-Nordström-Metrik

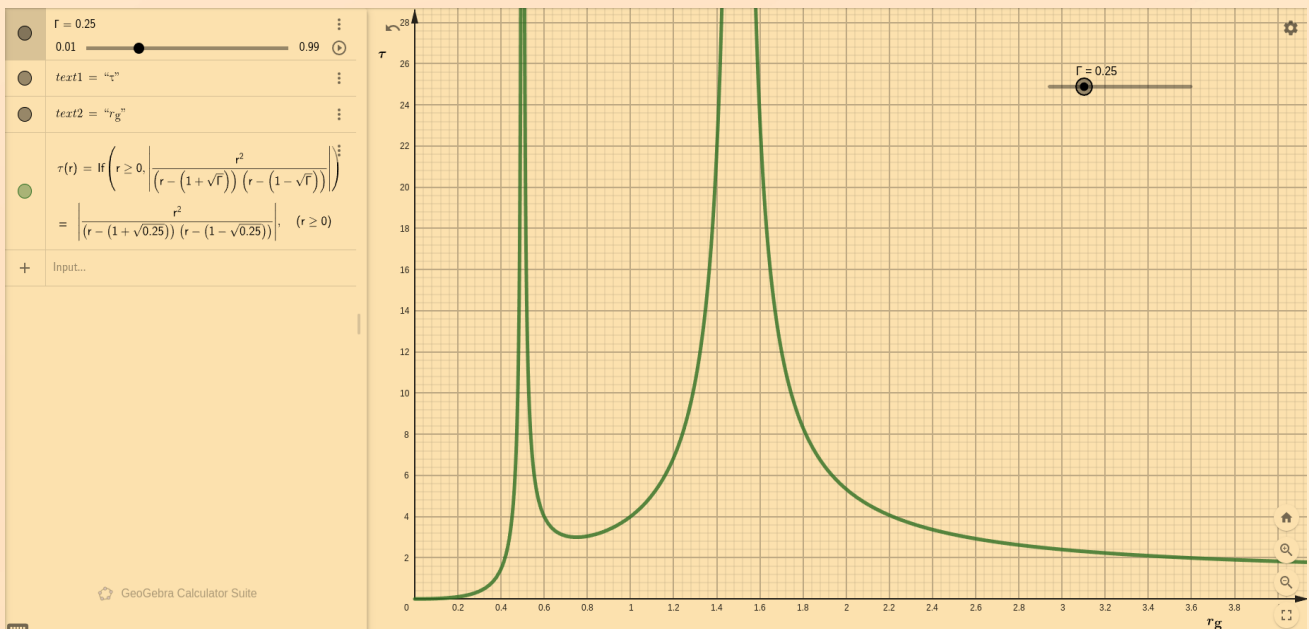
$\tau = \sqrt{|(g^t)|} = \frac{r^2}{Q^2 + r \cdot (r - 2M)} = \frac{r^2}{(r - M)^2 + Q^2 - M^2}$ ist die gravitative Zeitdilatation der Reissner-Nordström-Metrik- in einem stärkeren Gravitationsfeld verläuft die Zeit langsamer als in einem schwächeren Gravitationsfeld - in der Nähe des Schwarzen Lochs. Mit $r^+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ und $r^- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$ erhält man auch: $\tau = \sqrt{|(g^t)|} = \frac{r^2}{(r - r^+) \cdot (r - r^-)}$. Sie steht in Beziehung zur

Fluchtgeschwindigkeit $v_{\text{Flucht}} = \frac{\sqrt{\tau^2 - 1}}{\tau}$ eines ungeladenen Partikels. Der folgende Plot bezieht sich auf Radien in Einheiten eines Gravitationsradius r_g , also $M = 1$. Setzt man auch $Q = 1$, dann eliminiert man eine Polstelle. Deshalb setze ich $\Lambda = M^2 - Q^2$, also: $r^+ = M + \sqrt{\Lambda}$ und $r^- = M - \sqrt{\Lambda}$. Damit der Radikand definiert ist, muss $\Lambda > 0$ sein, was bedeutet, dass die gesamte Energie des Schwarzen Lochs größer als die elektrische Energie ist. Dann ergibt sich:

$$\Lambda = \frac{M^2 - Q^2}{M^2} \cdot M^2 = \Gamma \cdot M^2, \quad \text{mit einem Skalierungsfaktor } 0 < \Gamma < 1 \text{ oder}$$

$r^+ = M + M \cdot \sqrt{\Gamma} = M \cdot (1 + \sqrt{\Gamma})$ bzw. $r^- = M - M \cdot \sqrt{\Gamma} = M \cdot (1 - \sqrt{\Gamma})$. Setzt man nun $M = 1$, misst also den Abstand in Gravitationsradien, dann ergibt sich: $r^+ = r_g \cdot (1 + \sqrt{\Gamma})$ bzw.

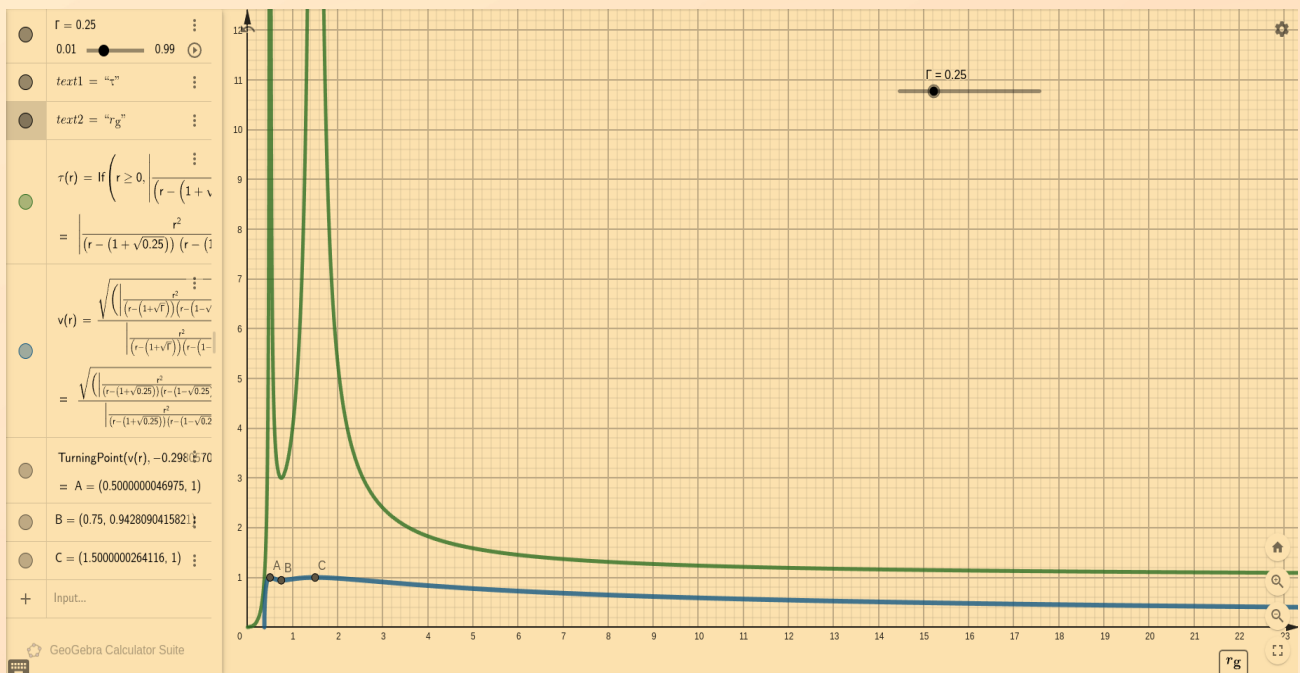
$r^- = r_g \cdot (1 - \sqrt{\Gamma})$. Man erhält: $\tau = \sqrt{|(g^t)|} = \frac{r^2}{(r - (1 + \sqrt{\Gamma})) \cdot (r - (1 - \sqrt{\Gamma}))}$ und sieht sehr deutlich die Polstellen an den zwei Ereignishorizonten, bei denen die Zeitdilatation t_∞ ist.



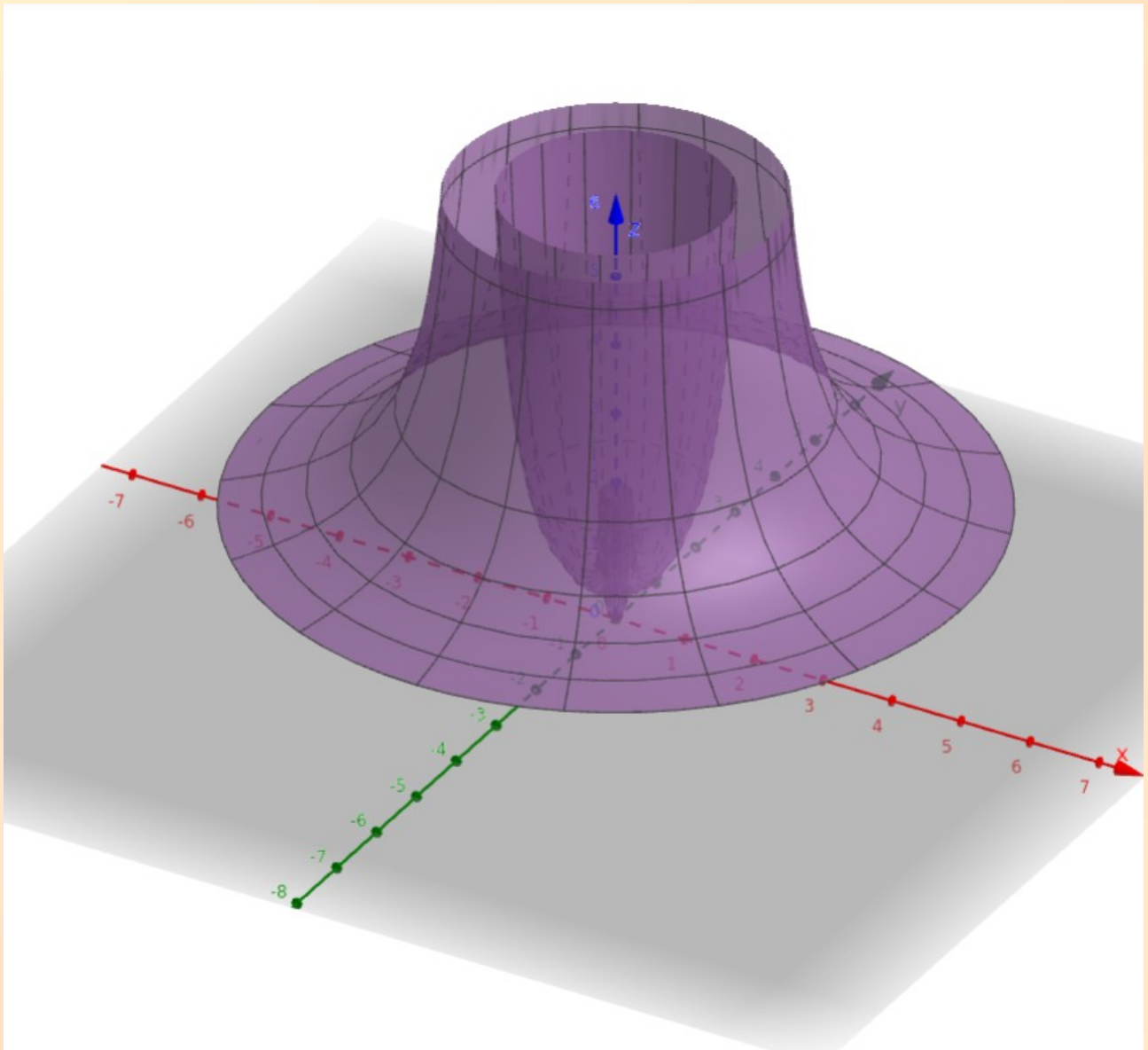
Zeitdilatation Reissner-Nordström-Metrik, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei, [Reissner-Nordström](#)

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

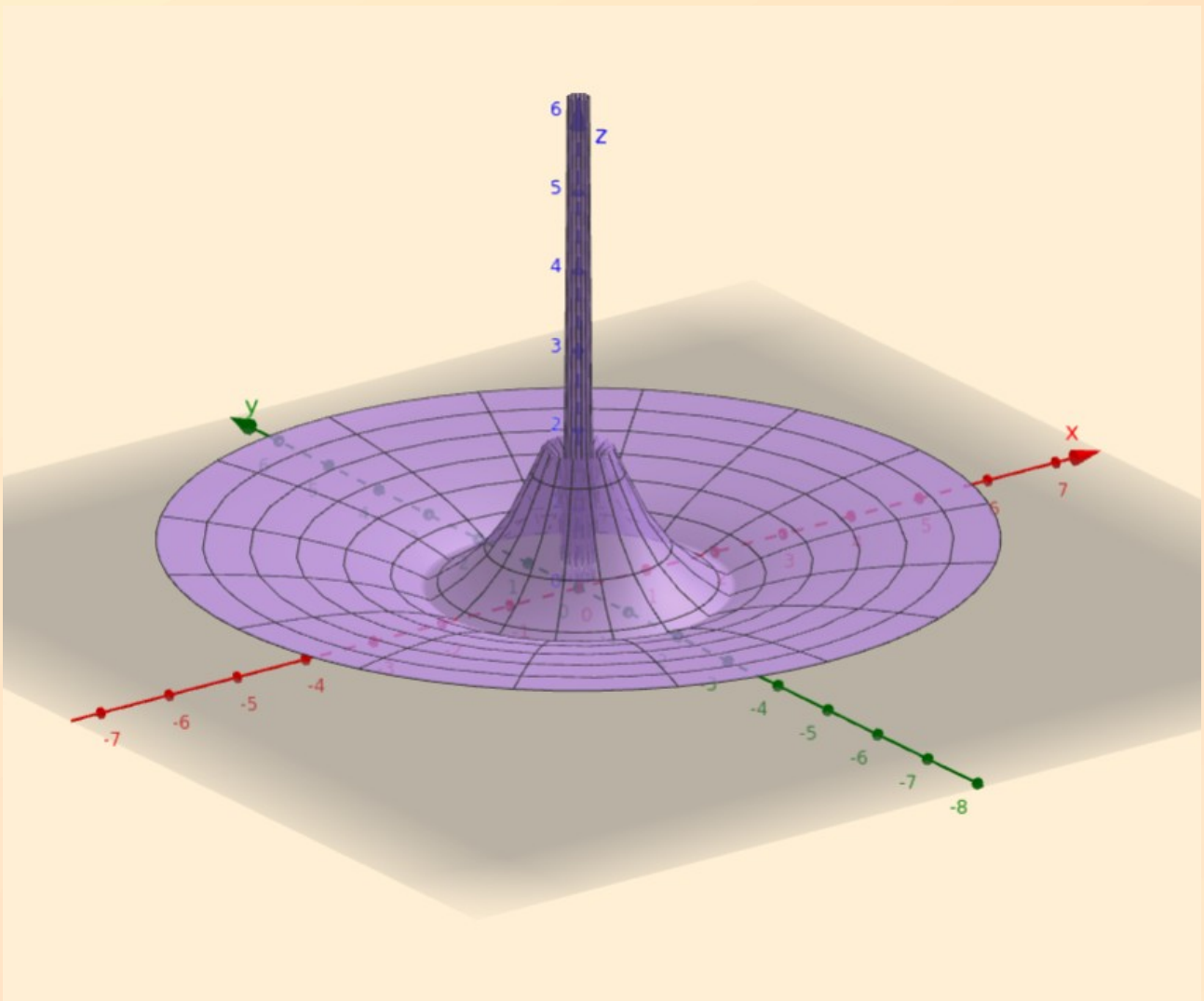
Es gilt $\lim_{r \rightarrow \infty} v(r) = 1$ bedeutet, dass am Ereignishorizont die Lichtgeschwindigkeit die Fluchtgeschwindigkeit ist. $\lim_{r \rightarrow \infty} \tau(r) = 1$ bedeutet, dass man sich unendlich weit weg vom Schwarzen Loch im gravitationsfreien Raum befindet. Dort gibt es dann keine Fluchtgeschwindigkeit, um dem Schwarzen Loch zu entinnen. Die folgende Grafik zeigt die grüne Kurve der Zeitdilatation $\tau(r)$ und die blaue Kurve der Fluchtgeschwindigkeit $v(r)$. Am Punkt A und C ist die Zeitdilatation t_∞ und an Punkt B liegt ein lokales Minimum vor. Die Zeitdilatation beträgt dort 3 (1 Sekunde Eigenzeit entspricht 3 Sekunden im gravitationsfreien Raum). Die Fluchtgeschwindigkeit an den beiden Ereignishorizonten ist 1, was der Lichtgeschwindigkeit entspricht, da $c=1$ gesetzt wurde. 10^3 Gravitationsradien vom Schwarzen Loch entfernt, beträgt die Fluchtgeschwindigkeit ca. 6,3 % der Lichtgeschwindigkeit und bei 10^6 Gravitationsradien noch ca. 2 % der Lichtgeschwindigkeit.



Zeitdilatation und Fluchtgeschwindigkeit Reissner-Nordström-Metrik, *Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei*,
[Reissner-Nordström](#)









Zeitdilatation $|g^{tt}|$, $0 < r < 5$ - Verhältnis der Wellenlängen - der Reissner-Nordström-Metrik in Polarkoordinaten, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei, [Reissner-Nordström](#)



Kehrwert der Zeitdilatation $\frac{1}{|g^t|}$, $0 < r < 5$ - Verhältnis der Frequenzen - der Reissner-Nordström-Metrik in Polarkoordinaten, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei, [Reissner-Nordström](#)

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Dabei sind folgende Eingaben benutzt worden:

| | | |
|---|--|---|
|  | $\Gamma = 0.65$  |  |
|  | $a = \text{Oberfläche} \left(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \left \frac{r^2}{(r - (1 + \sqrt{\Gamma})) (r - (1 - \sqrt{\Gamma}))} \right \right)$ $= \left(\begin{array}{c} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ \left \frac{r^2}{(r - (1 + \sqrt{0.65})) (r - (1 - \sqrt{0.65}))} \right \end{array} \right)$ | |
|  | $b = \text{Oberfläche} \left(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \left \frac{1}{\frac{r^2}{(r - (1 + \sqrt{\Gamma})) (r - (1 - \sqrt{\Gamma}))}} \right \right)$ $= \left(\begin{array}{c} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ \left \frac{1}{\frac{r^2}{(r - (1 + \sqrt{0.65})) (r - (1 - \sqrt{0.65}))}} \right \end{array} \right)$ | |
|  | Eingabe... | |

5.8.4.2.2 Besondere Bereiche der Reissner-Nordström-Metrik

Bei der Reissner-Nordström-Metrik

$$g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \frac{2Mr - Q^2}{r^2} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{r^2 - 2Mr + Q^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

führt $\tau = \frac{2Mr - Q^2}{r^2} = 1$ zum Verschwinden der zeitlichen Metrikkomponente g_{tt} und bei

$\Sigma = r^2 - 2Mr + Q^2 = 0$ mit $r^+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$ (äußerer Horizont), $r^- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$ (innerer Horizont) zu Polstellen der räumlichen Metrikkomponente g_{rr} (Siehe vorheriges Kapitel). Da aber

$\tau = \frac{2Mr - Q^2}{r^2}$ ist, gilt $-\tau \cdot r^2 = -2Mr + Q^2$ und damit $g_{rr} = \frac{r^2}{r^2 \cdot (1 - \tau)}$ gilt. Also kann man die

Metrik entsprechend abgekürzt umschreiben:

$$g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \tau - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Das Verschwinden der zeitlichen Komponente bei $\tau = 1$ der Metrik, zieht also das Verschwinden von Σ nach sich, sodass die zeitliche Komponente an den Horizonten verschwindet, wie es bei der Schwarzschildmetrik der Fall ist. Die Metrik kann auch als Linienelement geschrieben werden. Dann ergibt sich aus der Bilinearform Folgendes Linienelement:

$$ds^2 = (\tau - 1) \cdot dt^2 + \frac{1}{1 - \tau} dr^2 + r^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\Phi^2).$$

Da $ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\Phi^2)$ das Linienelement der Kugel in Kugelkoordinaten ist, schreibt man auch kürzer mit $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\Phi^2$ und erhält schließlich

$$ds^2 = (\tau - 1) \cdot dt^2 + \frac{1}{1 - \tau} dr^2 + r^2 \cdot d\Omega^2.$$

Diese Überlegungen führen dann zu besonderen Bereichen in der Raumzeit. Folgendes Bild zeigt eine Vorzeichenuntersuchung der zeitlichen Komponente. Es gibt Metriken bei denen sich das Vorzeichen ändert. Hier ist dies aber nicht der Fall. M und Q wurden dabei gleich Eins gesetzt.

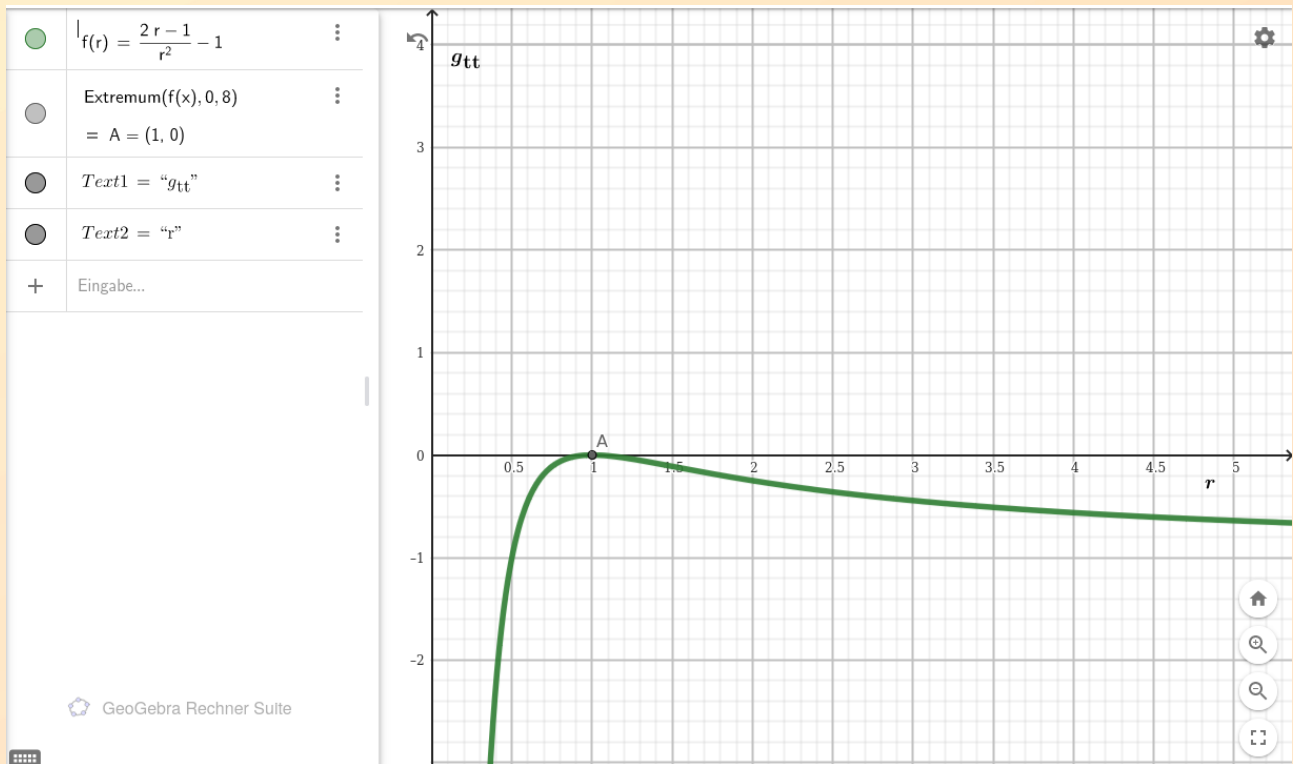


Abb. Vorzeichen der zeitlichen Koordinate der Reissner-Nordström-Metrik zwischen den Ereignishorizonten, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

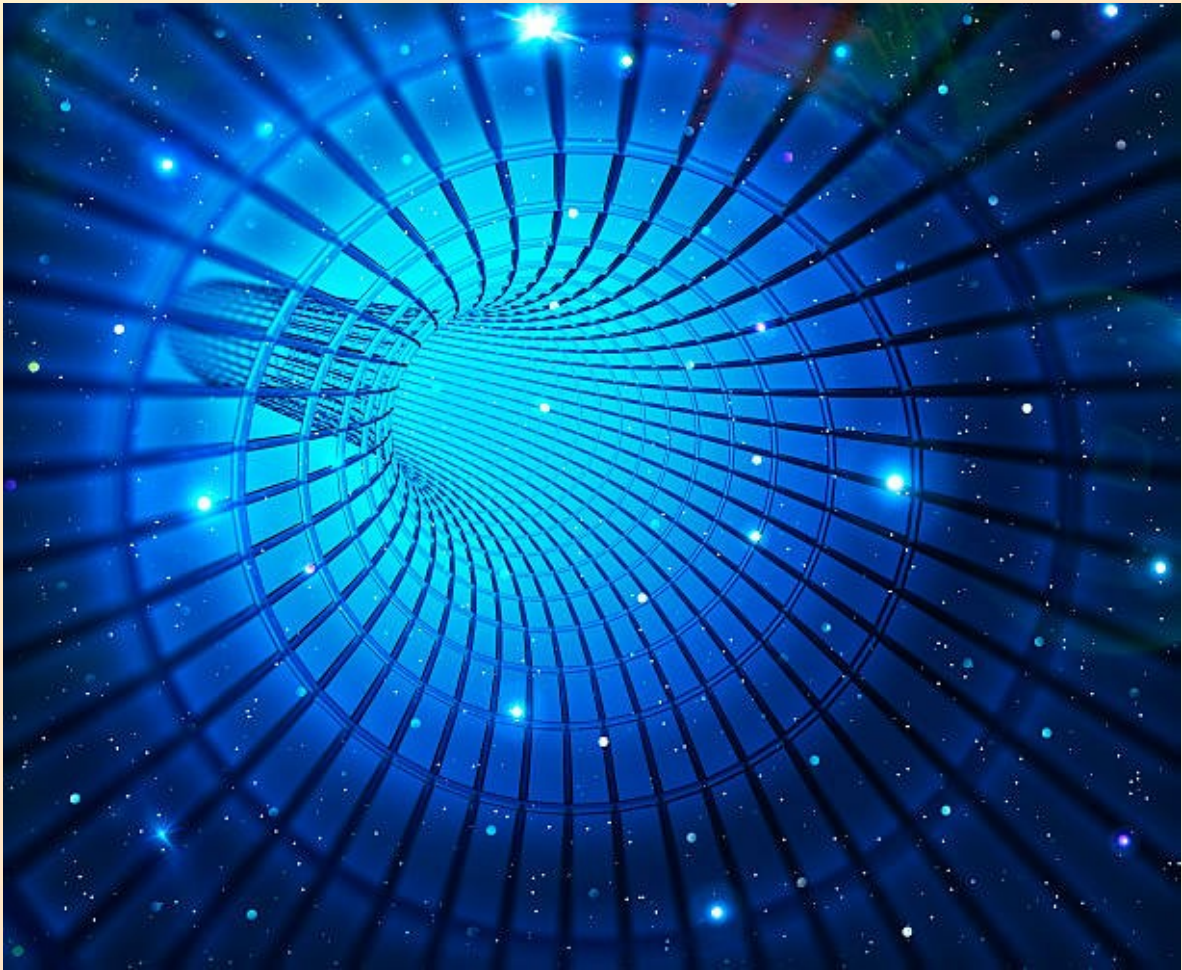
Wie man sieht behält die Zeit ihr negatives Vorzeichen. Also liegt zwischen den Ereignishorizonten eine kausale Raumzeit. Die Punktsingularität ist bei der Reissner-Nordström-Metrik bei $r = 0$ vorhanden. Dort gilt: $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2Mr - Q^2}{r^2} - 1 = \infty$, $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2}{r^2 - 2Mr + Q^2} = 0$ und θ, Φ nicht wohldefiniert. Das Koordinatensystem bricht also bei $r=0$ zusammen. Wir erhalten eine Punktsingularität wie bei ungeladenen nicht rotierenden Schwarzen Löchern.

Vergleicht man die Linienelemente der Schwarzschildmetrik und der Reissner-Nordström-Metrik, dann fällt sofort die strukturelle Ähnlichkeit auf.

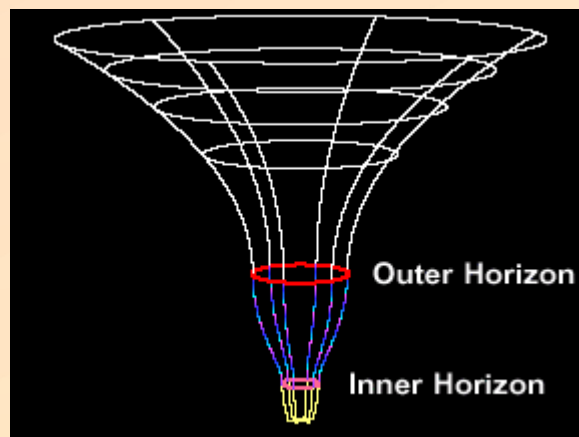
$$ds^2 = (\tau - 1) \cdot dt^2 + \frac{1}{1 - \tau} dr^2 + r^2 \cdot d\Omega^2 \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{2Mr - Q^2}{r^2}$$

$$ds^2 = -(\tau - 1) \cdot dt^2 + \frac{1}{1 - \tau} dr^2 + r^2 \cdot d\Omega^2 \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{2M}{r}$$

Damit können wir uns die beiden Schwarzen Löcher geladen und ungeladen strukturell gleichartig vorstellen, nur mit dem Unterschied, dass bei der Schwarzschildmetrik genau ein Ereignishorizont existiert und bei der Reissner-Nordström-Metrik zwei davon.



Blick in ein nicht rotierendes, ungeladenes Schwarzes Loch (Schwarzschildmetrik),
<https://www.istockphoto.com/de/search/2/image-film?phrase=schwarzes%20loch%20drahtgitter&page=2>, gemeinfrei



Blick auf ein nicht rotierendes, geladenes Schwarze Loch (Reissner-Nordström-Metrik),
<https://jila.colorado.edu/~ajsh/bh/rn.html>

5.8.4.3 Die Kerr-Metrik

Die Metrik für rotierende, ungeladene Schwarze Löcher ist durch die **Kerr-Metrik** gegeben.

$$g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \frac{r_s \cdot r}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} - 1 & 0 & 0 & a \frac{r_s \cdot r}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} \sin^2 \theta \\ 0 & \frac{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta}{r^2 - r_s \cdot r + a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta & 0 \\ a \frac{r_s \cdot r}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} \sin^2 \theta & 0 & 0 & \frac{((a^2 + r^2)^2 - a^2 \cdot (r^2 - r_s \cdot r + a^2) \cdot \sin^2 \theta) \cdot \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Mit folgenden Ausdrücken:

$$\xi = \frac{r_s \cdot r}{\Sigma}$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta$$

$$\Delta = r^2 - r_s \cdot r + a^2$$

$$\chi = (a^2 + r^2)^2 - a^2 \cdot \Delta \cdot \sin^2 \theta$$

$$a = \frac{J}{M} \quad J = \text{Drehimpuls}$$

$$r_s = 2 \cdot M \quad r_s = \text{Schwarzschildradius}$$

liefert das
$$g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \xi - 1 & 0 & 0 & a \xi \sin^2 \theta \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ a \xi \sin^2 \theta & 0 & 0 & \frac{\chi \cdot \sin^2 \theta}{\Sigma} \end{pmatrix}.$$

Folgendes SageMath Skript berechnet dann die weiteren Tensoren:

```
#Einstein Tensor Kerr Metrik
version()
M = Manifold(4, 'M', structure='Lorentzian')
fr.<t,x,y,z> = M.chart(r't x y z')
var ('rs m Q a', domain='real')
g00(x,y)=rs*x/(x^2+a^2*(cos(y))^2) -1
g03(x,y)=(a*rs*x*(sin(y))^2)/(x^2+a^2*(cos(y))^2)
g30(x,y)=(a*rs*x*(sin(y))^2)/(x^2+a^2*(cos(y))^2)
g11(x,y)=(x^2+a^2*(cos(y))^2)/(x^2-rs*x+a^2)
g22(x,y)=(x^2+a^2*(cos(y))^2)
g33(x,y)=((a^2+x^2)^2 - a^2*(x^2-rs*x+a^2)*(sin(y))^2*(sin(y))^2)/(x^2+a^2*(cos(y))^2)
g=M.metric()
g[0,0]=g00(x,y)
g[0,3]=g03(x,y)
g[3,0]=g03(x,y)
g[1,1]=g11(x,y)
g[2,2]=g22(x,y)
```

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

```
g[3,3]=g33(x,y)
print("*****");
print("*****Kerr-Metrik*****");
print("*****");
latex(g[:])
h=g.inverse()
print("*****");
print("*****Inverse Kerr-Metrik*****");
print("*****");
latex(h[:])
nabla = g.connection()
print("*****");
print("*****Christoffelsymbole*****");
print("*****");
latex(g.christoffel_symbols_display())
Ricci = nabla.ricci()
print("*****");
print("*****Ricci tensor*****");
print("*****");
latex(Ricci[:])
Ricci_scalar= g.ricci_scalar()
print("*****");
print("*****Ricci scalar*****");
print("*****");
latex(Ricci_scalar.display())
```

Das Ergebnis ist ein Latex-Skript, das z. B. angepasst an TexWorks umgewandelt in ein PDF-File werden kann.

```
% \documentclass[8pt a3paper]{article}
\documentclass{scrartcl}

\usepackage{amsmath}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{hyperref}
\usepackage[latin1]{inputenc}
% \usepackage[ngerman]{babel}
\usepackage{pdfpages}

\KOMAOPTIONS{paper=A2,paper=landscape,pagesize}
\realtypesetarea

\title{Einstein tensor Kerr Metric}
\author{Gunter Opitz-Ohlsen}
\date{03.04.2024}

\begin{document}
\maketitle{Einstein tensor Kerr-Metric}
\section{Kerr-Metric}
$\left(\begin{array}{rrrr}\end{array}\right)$
```



```

\frac{\mathit{rs} x}{\sin\left(y\right)^2} \{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2\} - 1 & 0 & 0 & \frac{a \mathit{rs} x}{\sin\left(y\right)^2} \{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2\} \\
0 & \frac{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2}{\sin\left(y\right)^2} \{a^2 - \mathit{rs} x + x^2\} & 0 & 0 \\
0 & 0 & a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2 & 0 \\
\frac{a \mathit{rs} x \sin\left(y\right)^2}{\sin\left(y\right)^2} \{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2\} & 0 & 0 & - \\
\frac{\left(\left(a^2 - \mathit{rs} x + x^2\right)\right) a^2 \sin\left(y\right)^2 - \left(a^2 + x^2\right)^2}{\sin\left(y\right)^2} \{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2\} \\
\end{array}\right)$
\section{Inverse Kerr-Metrik}
$\left(\begin{array}{rrrr}
-\frac{a^4 + 2 \, a^2 x^2 + x^4 - \left(a^4 - a^2 \mathit{rs} x + a^2 x^2\right)}{\sin\left(y\right)^2} \{a^2 x^2 - \mathit{rs} x^3 + x^4 + \left(a^4 - a^2 \mathit{rs} x + a^2 x^2\right) \cos\left(y\right)^2\} & 0 & 0 & \frac{a \mathit{rs} x}{\sin\left(y\right)^2} \{a^2 x^2 - \mathit{rs} x^3 + x^4 + \left(a^4 - a^2 \mathit{rs} x + a^2 x^2\right) \cos\left(y\right)^2\} \\
0 & \frac{a^2 - \mathit{rs} x + x^2}{\sin\left(y\right)^2} \{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2\} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{\sin\left(y\right)^2} \{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2\} & 0 \\
\frac{a \mathit{rs} x}{\sin\left(y\right)^2} \{a^2 x^2 - \mathit{rs} x^3 + x^4 + \left(a^4 - a^2 \mathit{rs} x + a^2 x^2\right) \cos\left(y\right)^2\} & 0 & 0 & -\frac{a^2 \cos\left(y\right)^2 - \mathit{rs} x + x^2}{\sin\left(y\right)^2} \{ \left(a^4 - a^2 \mathit{rs} x + a^2 x^2\right) \cos\left(y\right)^4 - a^2 x^2 + \mathit{rs} x^3 - x^4 - \left(a^4 - a^2 \mathit{rs} x + \mathit{rs} x^3 - x^4\right) \cos\left(y\right)^2 \} \\
\end{array}\right)$
\section{Christoffel Symbole}
$\begin{array}{l}
\Gamma_{\phantom{\,}\,t\,t\,x}^{\phantom{\,}\,t\,t\,x} = \frac{a^4 \mathit{rs} - \mathit{rs} x^4 - \left(a^4 \mathit{rs} + a^2 \mathit{rs} x^2\right) \sin\left(y\right)^2}{2 \, \left(a^2 x^4 - \mathit{rs} x^5 + x^6 + \left(a^6 - a^4 \mathit{rs} x + a^4 x^2\right) \cos\left(y\right)^4 + 2 \, \left(a^4 x^2 - a^2 \mathit{rs} x^3 + a^2 x^4\right) \cos\left(y\right)^2\right)} \\
\Gamma_{\phantom{\,}\,t\,t\,y}^{\phantom{\,}\,t\,t\,y} = \frac{a^2 \mathit{rs} x \cos\left(y\right) \sin\left(y\right)}{a^4 \cos\left(y\right)^4 + 2 \, a^2 x^2 \cos\left(y\right)^2 + x^4} \\
\Gamma_{\phantom{\,}\,t\,x\,z}^{\phantom{\,}\,t\,x\,z} = \frac{\left(a^5 \mathit{rs} - a^3 \mathit{rs} x^2\right) \sin\left(y\right)^4 - \left(a^5 \mathit{rs} - 2 \, a^3 \mathit{rs} x^2 - 3 \, a \mathit{rs} x^4\right) \sin\left(y\right)^2}{2 \, \left(a^2 x^4 - \mathit{rs} x^5 + x^6 + \left(a^6 - a^4 \mathit{rs} x + a^4 x^2\right) \cos\left(y\right)^4 + 2 \, \left(a^4 x^2 - a^2 \mathit{rs} x^3 + a^2 x^4\right) \cos\left(y\right)^2\right)} \\
\Gamma_{\phantom{\,}\,t\,y\,z}^{\phantom{\,}\,t\,y\,z} = \frac{a^5 \mathit{rs} x \cos\left(y\right) \sin\left(y\right)^5 - \left(a^5 \mathit{rs} x + a^3 \mathit{rs} x^3\right) \cos\left(y\right) \sin\left(y\right)^3}{a^6 \cos\left(y\right)^6 + 3 \, a^4 x^2 \cos\left(y\right)^4 + 3 \, a^2 x^4 \cos\left(y\right)^2 + x^6} \\
\Gamma_{\phantom{\,}\,x\,t\,t}^{\phantom{\,}\,x\,t\,t} = \frac{a^2 \mathit{rs} x^2 - \mathit{rs}^2 x^3 + \mathit{rs} x^4 - \left(a^4 \mathit{rs} - a^2 \mathit{rs}^2 x + a^2 \mathit{rs} x^2\right) \cos\left(y\right)^2}{2 \, \left(a^6 \cos\left(y\right)^6 + 3 \, a^4 x^2 \cos\left(y\right)^4 + 3 \, a^2 x^4 \cos\left(y\right)^2 + x^6\right)} \\
\Gamma_{\phantom{\,}\,x\,t\,z}^{\phantom{\,}\,x\,t\,z} = \frac{\left(a^3 \mathit{rs} x^2 - a \mathit{rs}^2 x^3 + a \mathit{rs}^2 x^4\right)}{2 \, \left(a^6 \cos\left(y\right)^6 + 3 \, a^4 x^2 \cos\left(y\right)^4 + 3 \, a^2 x^4 \cos\left(y\right)^2 + x^6\right)}
\end{array}
```

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

[illegible]

```

{2 \, {\left(a^{2} x^{4} - \mathit{rs} x^{5} + x^{6} + {\left(a^{6} - a^{4} \mathit{rs} x + a^{4}
x^{2}\right)} \cos\left(y\right)^{4} + 2 \, {\left(a^{4} x^{2} - a^{2} \mathit{rs} x^{3} + a^{2}
x^{4}\right)} \cos\left(y\right)^{2}\right)} \} \} \Gamma_{\phantom{\, , z} \, , y \, , z}^{\phantom{\, , y} \phantom{\, , z}} & = & -\frac{{\left(a^{4} \cos\left(y\right)^{5} - {\left(a^{2}
\mathit{rs} x - 2 \, a^{2} x^{2}\right)} \cos\left(y\right)^{3} + {\left(a^{2} \mathit{rs} x +
x^{4}\right)} \cos\left(y\right)\right)} \sin\left(y\right) {\left(a^{4} \cos\left(y\right)^{6} - {\left(a^{4} -
2 \, a^{2} x^{2}\right)} \cos\left(y\right)^{4} - x^{4} - {\left(2 \, a^{2} x^{2} - x^{4}\right)}
\cos\left(y\right)^{2}\right)} {\end{array}}$
\section{Riccitensor}
$\left(\begin{array}{rrrr}
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$
\section{Riciscalar}
$\begin{array}{llcl} \& \left(t, x, y, z\right) \& \longmapsto & 0 \end{array}$
\end{document}

```

Es stellt sich heraus, dass der Riccitensor verschwindet und damit auch der Einsteintensor. Hier noch einmal die Ergebnisse:

1 Kerr-Metrik

$$\begin{pmatrix} \frac{rsx}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} - 1 & 0 & 0 & \frac{arsx \sin(y)^2}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} \\ 0 & \frac{a^2 \cos(y)^2 + x^2}{a^2 - rsx + x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \cos(y)^2 + x^2 & 0 \\ \frac{arsx \sin(y)^2}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} & 0 & 0 & -\frac{\left((a^2 - rsx + x^2)a^2 \sin(y)^2 - (a^2 + x^2)^2\right) \sin(y)^2}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} \end{pmatrix}$$

Inverse Kerr-Metrik Spalte 1 – 3:

$$\begin{pmatrix} -\frac{a^4 + 2a^2x^2 + x^4 - (a^4 - a^2rsx + a^2x^2) \sin(y)^2}{a^2x^2 - rsx^3 + x^4 + (a^4 - a^2rsx + a^2x^2) \cos(y)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2 - rsx + x^2}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} \\ \frac{arsx}{a^2x^2 - rsx^3 + x^4 + (a^4 - a^2rsx + a^2x^2) \cos(y)^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Inverse Kerr-Metrik Spalte 4:

$$\begin{pmatrix}
 \frac{arsx}{a^2x^2 - rsx^3 + x^4 + (a^4 - a^2rsx + a^2x^2) \cos(y)^2} & 0 & 0 \\
 -\frac{a^2 \cos(y)^2 - rsx + x^2}{(a^4 - a^2rsx + a^2x^2) \cos(y)^4 - a^2x^2 + rsx^3 - x^4 - (a^4 - a^2rsx + rsx^3 - x^4) \cos(y)^2} & &
 \end{pmatrix}$$

Christoffelsymbole 1. Teil:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^t_{tx} &= -\frac{a^4rs - rsx^4 - (a^4rs + a^2rsx^2) \sin(y)^2}{2(a^2x^4 - rsx^5 + x^6 + (a^6 - a^4rsx + a^4x^2) \cos(y)^4 + 2(a^4x^2 - a^2rsx^3 + a^2x^4) \cos(y)^2)} \\
 \Gamma^t_{ty} &= -\frac{a^2rsx \cos(y) \sin(y)}{a^4 \cos(y)^4 + 2a^2x^2 \cos(y)^2 + x^4} \\
 \Gamma^t_{xz} &= \frac{(a^5rs - a^3rsx^2) \sin(y)^4 - (a^5rs - 2a^3rsx^2 - 3arsx^4) \sin(y)^2}{2(a^2x^4 - rsx^5 + x^6 + (a^6 - a^4rsx + a^4x^2) \cos(y)^4 + 2(a^4x^2 - a^2rsx^3 + a^2x^4) \cos(y)^2)} \\
 \Gamma^t_{yz} &= \frac{a^5rsx \cos(y) \sin(y)^5 - (a^5rsx + a^3rsx^3) \cos(y) \sin(y)^3}{a^6 \cos(y)^6 + 3a^4x^2 \cos(y)^4 + 3a^2x^4 \cos(y)^2 + x^6} \\
 \Gamma^x_{tt} &= \frac{a^2rsx^2 - rs^2x^3 + rsx^4 - (a^4rs - a^2rs^2x + a^2rsx^2) \cos(y)^2}{2(a^6 \cos(y)^6 + 3a^4x^2 \cos(y)^4 + 3a^2x^4 \cos(y)^2 + x^6)} \\
 \Gamma^x_{tz} &= \frac{(a^3rsx^2 - ars^2x^3 + arsx^4 - (a^5rs - a^3rs^2x + a^3rsx^2) \cos(y)^2) \sin(y)^2}{2(a^6 \cos(y)^6 + 3a^4x^2 \cos(y)^4 + 3a^2x^4 \cos(y)^2 + x^6)} \\
 \Gamma^x_{xx} &= \frac{a^2rs - rsx^2 - (a^2rs - 2a^2x) \sin(y)^2}{2(a^2x^2 - rsx^3 + x^4 + (a^4 - a^2rsx + a^2x^2) \cos(y)^2)} \\
 \Gamma^x_{xy} &= -\frac{a^2 \cos(y) \sin(y)}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} \\
 \Gamma^x_{yy} &= -\frac{a^2x - rsx^2 + x^3}{a^2 \cos(y)^2 + x^2}
 \end{aligned}$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Christoffelsymbole Teil 2:

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^y &= -\frac{a^2 r s x \cos(y) \sin(y)}{a^6 \cos(y)^6 + 3 a^4 x^2 \cos(y)^4 + 3 a^2 x^4 \cos(y)^2 + x^6} \\
 \Gamma_{tz}^y &= -\frac{(a^3 r s x + a r s x^3) \cos(y) \sin(y)}{a^6 \cos(y)^6 + 3 a^4 x^2 \cos(y)^4 + 3 a^2 x^4 \cos(y)^2 + x^6} \\
 \Gamma_{xx}^y &= \frac{a^2 \cos(y) \sin(y)}{a^2 x^2 - r s x^3 + x^4 + (a^4 - a^2 r s x + a^2 x^2) \cos(y)^2} \\
 \Gamma_{xy}^y &= \frac{x}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} \\
 \Gamma_{yy}^y &= -\frac{a^2 \cos(y) \sin(y)}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} \\
 \Gamma_{zz}^y &= -\frac{\left((a^6 - a^4 r s x + a^4 x^2) \cos(y)^5 + 2(a^4 x^2 - a^2 r s x^3 + a^2 x^4) \cos(y)^3 + (a^4 r s x + 2 a^2 r s x^3 + a^2 x^4 + x^6) \cos(y)\right) \sin(y)}{a^6 \cos(y)^6 + 3 a^4 x^2 \cos(y)^4 + 3 a^2 x^4 \cos(y)^2 + x^6} \\
 \Gamma_{tx}^z &= \frac{a^3 r s \cos(y)^2 - a r s x^2}{2(a^2 x^4 - r s x^5 + x^6 + (a^6 - a^4 r s x + a^4 x^2) \cos(y)^4 + 2(a^4 x^2 - a^2 r s x^3 + a^2 x^4) \cos(y)^2)} \\
 \Gamma_{ty}^z &= -\frac{a r s x \cos(y) \sin(y)}{a^4 \cos(y)^6 - (a^4 - 2 a^2 x^2) \cos(y)^4 - x^4 - (2 a^2 x^2 - x^4) \cos(y)^2} \\
 \Gamma_{xz}^z &= -\frac{a^2 r s x^2 + 2 r s x^4 - 2 x^5 + (a^4 r s - 2 a^4 x) \cos(y)^4 - (a^4 r s - a^2 r s x^2 + 4 a^2 x^3) \cos(y)^2}{2(a^2 x^4 - r s x^5 + x^6 + (a^6 - a^4 r s x + a^4 x^2) \cos(y)^4 + 2(a^4 x^2 - a^2 r s x^3 + a^2 x^4) \cos(y)^2)} \\
 \Gamma_{yz}^z &= -\frac{(a^4 \cos(y)^5 - (a^2 r s x - 2 a^2 x^2) \cos(y)^3 + (a^2 r s x + x^4) \cos(y)) \sin(y)}{a^4 \cos(y)^6 - (a^4 - 2 a^2 x^2) \cos(y)^4 - x^4 - (2 a^2 x^2 - x^4) \cos(y)^2}
 \end{aligned}$$

Christoffelsymbole Teil 3a:

$$\Gamma_{zz}^x = \frac{(a^6 r s + 3 a^4 r s x^2 - 2 a^4 x^3 - (2 a^6 + a^4 r s^2) x) \sin(y)^6}{a^6 \cos(y)^6 + 3 a^4 x^2 \cos(y)^4 + 3 a^2 x^4 \cos(y)^2 + x^6}$$

Christoffelsymbole Teil 3b:

$$\frac{-\left(a^6 r s + 4 a^4 r s x^2 + 3 a^2 r s x^4 - 4 a^2 x^5 - (8 a^4 - a^2 r s^2) x^3 - (4 a^6 + a^4 r s^2) x\right) \sin(y)^4}{2(a^6 \cos(y)^6 + 3 a^4 x^2 \cos(y)^4 + 3 a^2 x^4 \cos(y)^2 + x^6)}$$

Christoffelsymbole Teil 3c:

$$\frac{-2(a^6 x - a^4 r s x^2 + 3 a^4 x^3 - 2 a^2 r s x^4 + 3 a^2 x^5 - r s x^6 + x^7) \sin(y)^2}{a^6 \cos(y)^6 + 3 a^4 x^2 \cos(y)^4 + 3 a^2 x^4 \cos(y)^2 + x^6}$$

4 Riccitenor

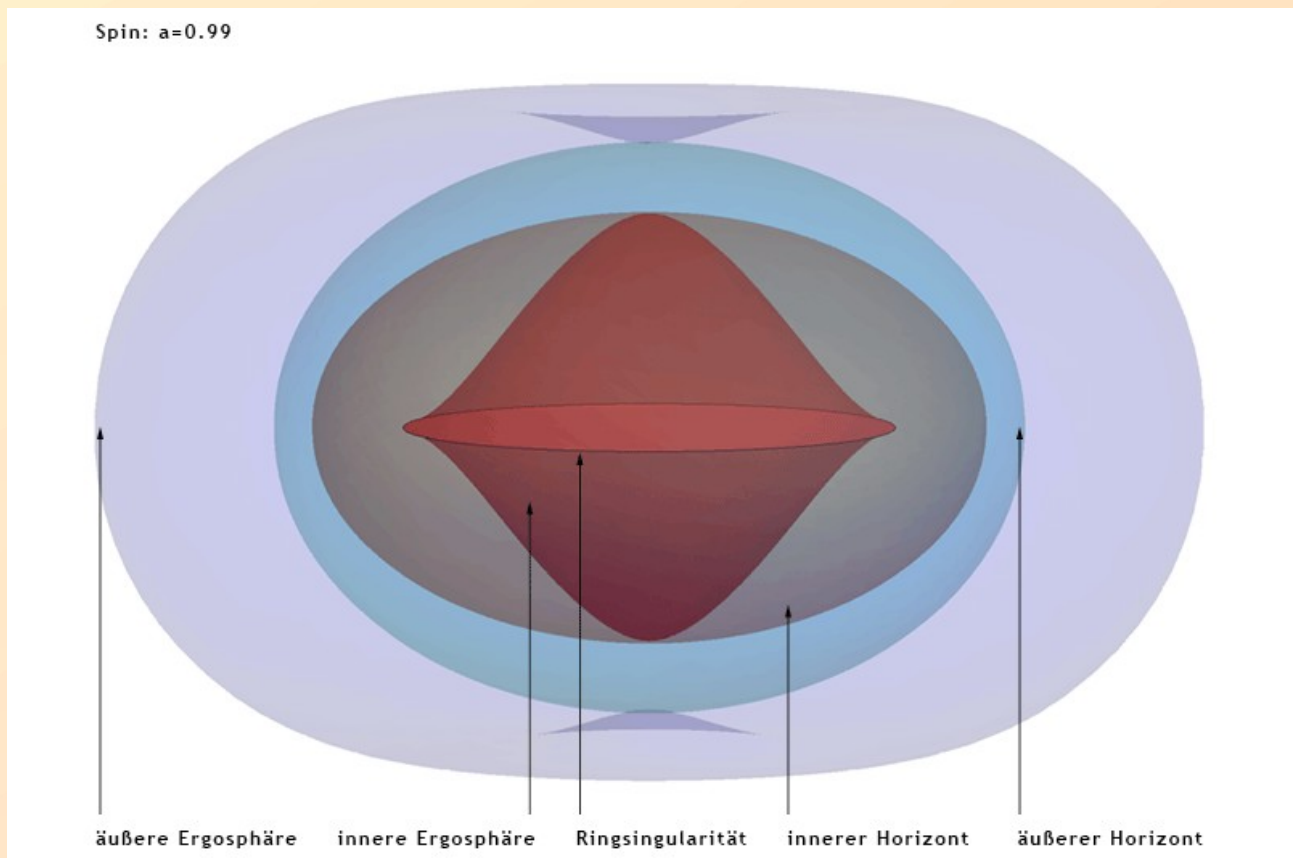
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5 Ricciscalar

$$(t, x, y, z) \longmapsto 0$$

Hierbei handelt es sich um die Vakuumlösung eines rotierenden Schwarzen Lochs, das ungeladen ist.

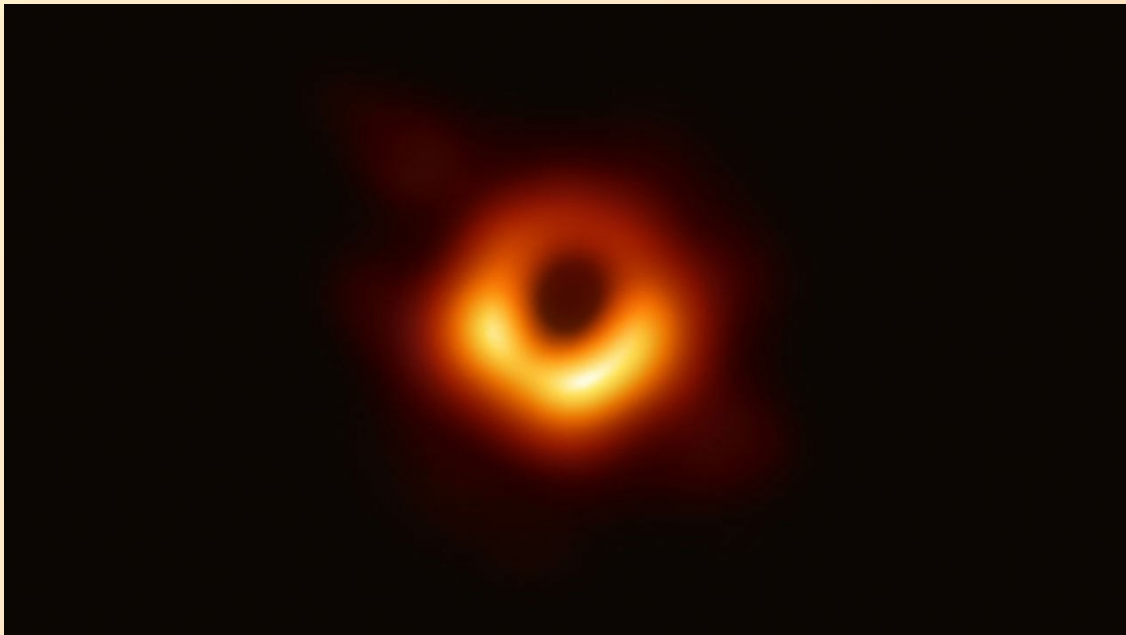
5.8.4.4 Die Bereiche eines rotierenden, ungeladenen Schwarzen Lochs



This file is licensed under the [Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International](#) license. Autor: [Yukterez](#) (Simon Tyran, Vienna).

Die Kerr Metrik enthält Singularitäten, wenn $\Sigma=0$ und wenn $\xi=1$ wird, verschwindet die zeitliche Komponente g_{tt} in der Kerr-Metrik. Dies liefert besondere Bereiche, die im Folgenden besprochen werden.

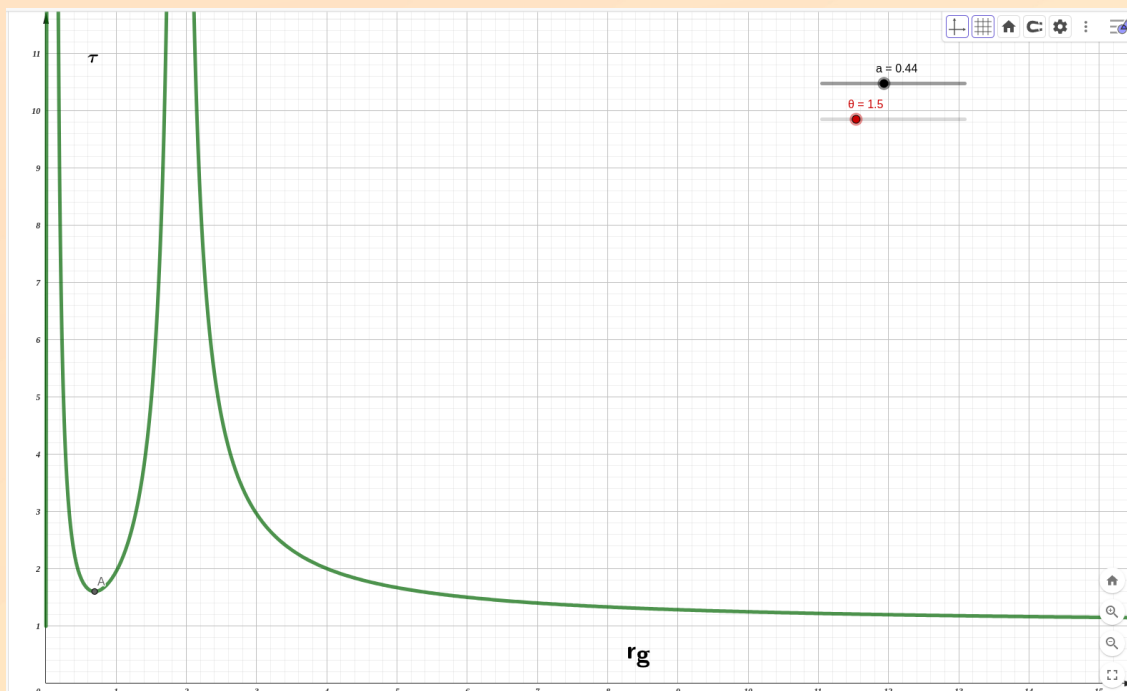
5.8.4.4.1 Die Zeitdilatation der Kerr-Metrik



[Rotverschiebung in der Umgebung eines Schwarzen Lochs im Zentrum der Galaxie Messier 87](#)

Sie ist gegeben durch $|g^t| = \left| -\frac{a^4 + 2 \cdot a^2 \cdot r^2 + r^4 - (a^4 - a^2 r_s r + a^2 r^2) \sin^2(\theta)}{a^2 r^2 - r_s r^3 + r^4 + (a^4 - a^2 r_s r + a^2 r^2) \cos^2(\theta)} \right|$

Lässt man sich mit Geogebra zu festen Winkeln θ und festen Werten für den Parameter a die Funktion τ zeichnen, dann hat man eine Grafik, die der Zeitdilatation der Reissner-Nordström-Metrik entspricht.



Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

| | | |
|--|--|--|
| | a = 0.44 0.01 1 | |
| | θ = 1.5 0 6.28 | |
| | $\tau(r) = \text{Wenn} \left(r > 0, \left -\frac{a^4 + 2a^2r^2 + r^4 - (a^4 - a^2 \cdot 2r + a^2r) \sin(\theta) \sin(\theta)}{a^2r^2 - 2r^3 + r^4 + (a^4 - a^2 \cdot 2r + a^2r^2) \cos(\theta) \cos(\theta)} \right \right)$ $= \left -\frac{0.44^4 + 2 \cdot 0.44^2 r^2 + r^4 - (0.44^4 - 0.44^2 \cdot 2r + 0.44^2 r) \sin(1.5) \sin(1.5)}{0.44^2 r^2 - 2r^3 + r^4 + (0.44^4 - 0.44^2 \cdot 2r + 0.44^2 r^2) \cos(1.5) \cos(1.5)} \right , \quad (r > 0)$ | |
| | text1 = "t" | |
| | text2 = "r\textsubscript{g}" | |
| | Extremum(τ, 0, 15) = A = (0.69, 1.61) | |
| | C = Max(τ, 1.7, 2.1) = (1.9, 147105698.11) | |
| | D = Max(τ, 0, 1) = (0.1, 115551443.7) | |
| | Eingabe... | |

Zusammenfassung der Parameter

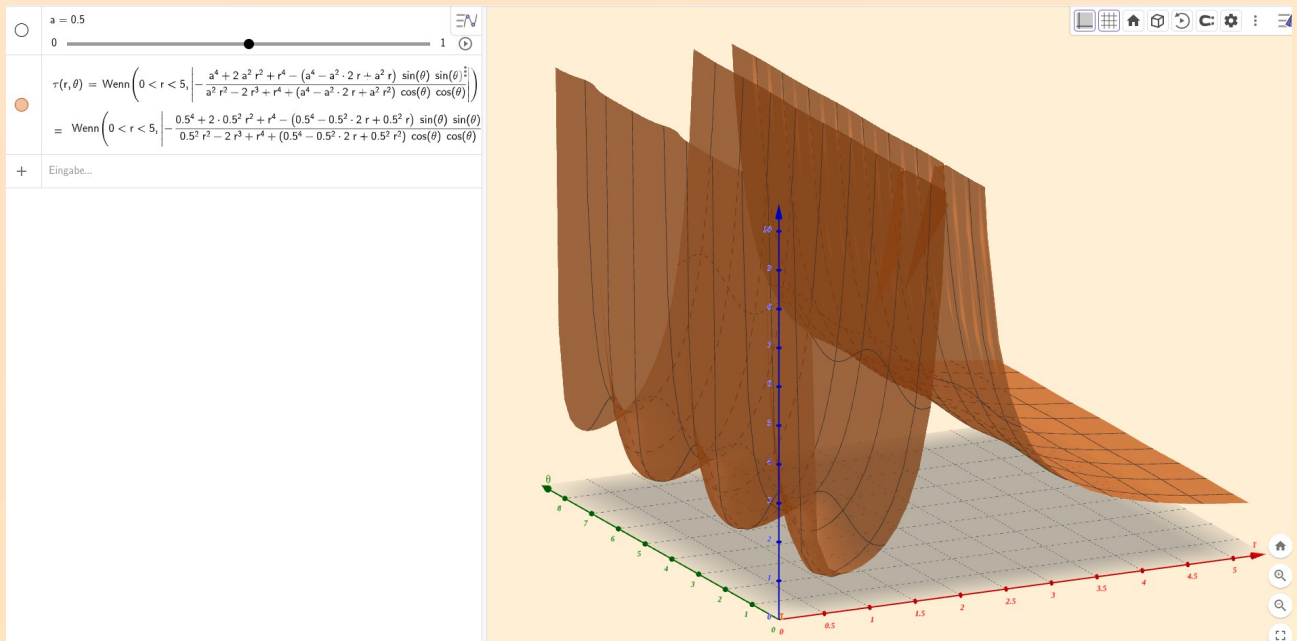


Abb. Schichtaufnahme Zeitdilatation Kerr-Metrik, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei
Die Hintereinanderschaltung des entsprechenden Parameters θ in zylindrischen Koordinaten (Schichtaufnahme für unterschiedliche Werte von θ) :

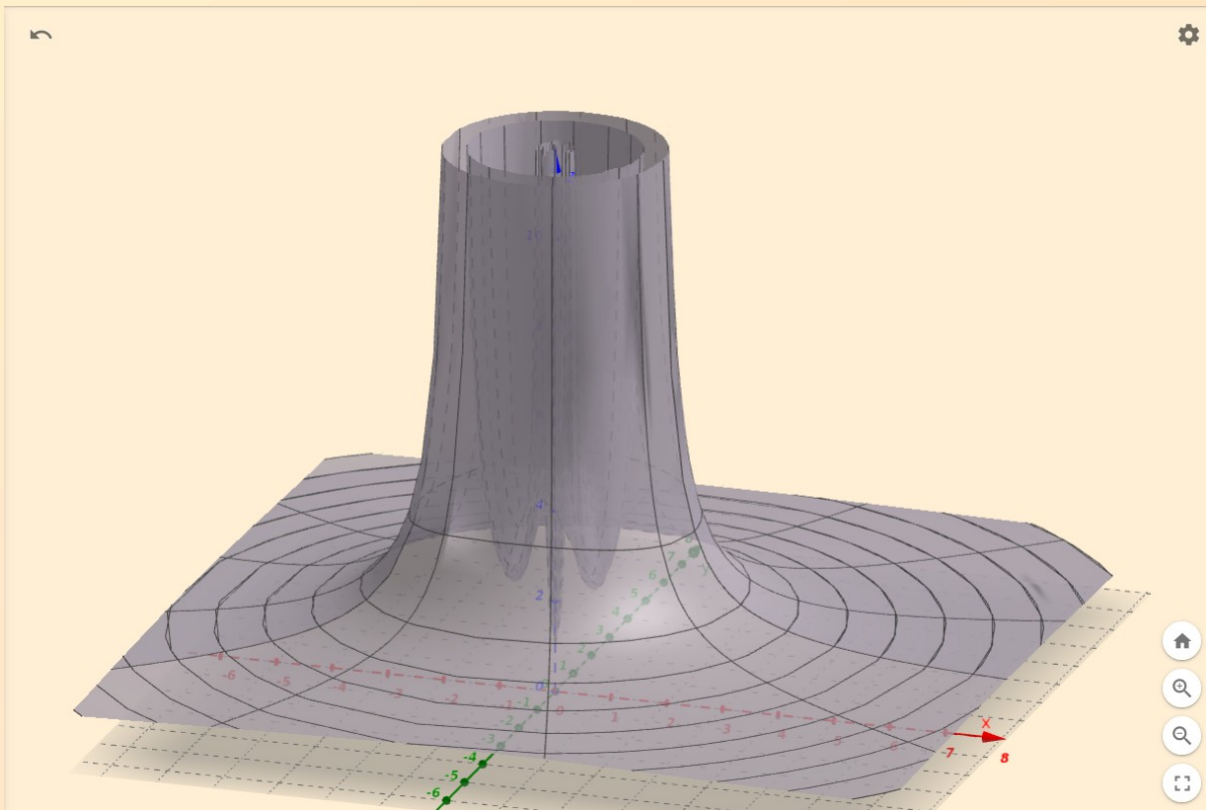


Abb Zeitdilatation $|g^t|$ Kerr-Metrik in Zylinderkoordinaten, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei, [Kerr-Metrik](#)

| | |
|----------------------------------|--|
| <input type="radio"/> | $a = 0.7$ <input type="range"/> 0 1 |
| <input type="radio"/> | $b = \text{Oberfläche} \left(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \left -\frac{a^4 + 2 a^2 r^2 + r^4 - (a^4 - a^2 \cdot 2 r + a^2 r) \sin(\theta) \sin(\theta)}{a^2 r^2 - 2 r^3 + r^4 + (a^4 - a^2 \cdot 2 r + a^2 r^2) \cos(\theta) \cos(\theta)} \right \right)$ |
| <input type="radio"/> | $= \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ \left -\frac{0.7^4 + 2 \cdot 0.7^2 r^2 + r^4 - (0.7^4 - 0.7^2 \cdot 2 r + 0.7^2 r) \sin(\theta) \sin(\theta)}{0.7^2 r^2 - 2 r^3 + r^4 + (0.7^4 - 0.7^2 \cdot 2 r + 0.7^2 r^2) \cos(\theta) \cos(\theta)} \right \end{pmatrix}$ |
| <input checked="" type="radio"/> | $c = \text{Oberfläche} \left(r \cos(\theta), r \sin(\theta), \frac{1}{\left -\frac{a^4 + 2 a^2 r^2 + r^4 - (a^4 - a^2 \cdot 2 r + a^2 r) \sin(\theta) \sin(\theta)}{a^2 r^2 - 2 r^3 + r^4 + (a^4 - a^2 \cdot 2 r + a^2 r^2) \cos(\theta) \cos(\theta)} \right }, r, 0, 10, \theta, 0, 2 \pi \right)$ |
| | $= \begin{pmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ \frac{1}{\left -\frac{0.7^4 + 2 \cdot 0.7^2 r^2 + r^4 - (0.7^4 - 0.7^2 \cdot 2 r + 0.7^2 r) \sin(\theta) \sin(\theta)}{0.7^2 r^2 - 2 r^3 + r^4 + (0.7^4 - 0.7^2 \cdot 2 r + 0.7^2 r^2) \cos(\theta) \cos(\theta)} \right } \end{pmatrix}$ |

Da die Zeitdilatation gleich dem Verhältnis der absorbierten zur emittierten Wellenlänge ist, kann man auch den Kehrwert nehmen. Dann stellt man das Verhältnis der emittierten zur absorbierten Frequenz dar. Das bedeutet, dass der Wert Null einer absorbierten Frequenz von Null entspricht,

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

also Dunkelheit oder einer Wellenlänge von ∞ . Während der Wert Eins keine Verschiebung bedeutet.

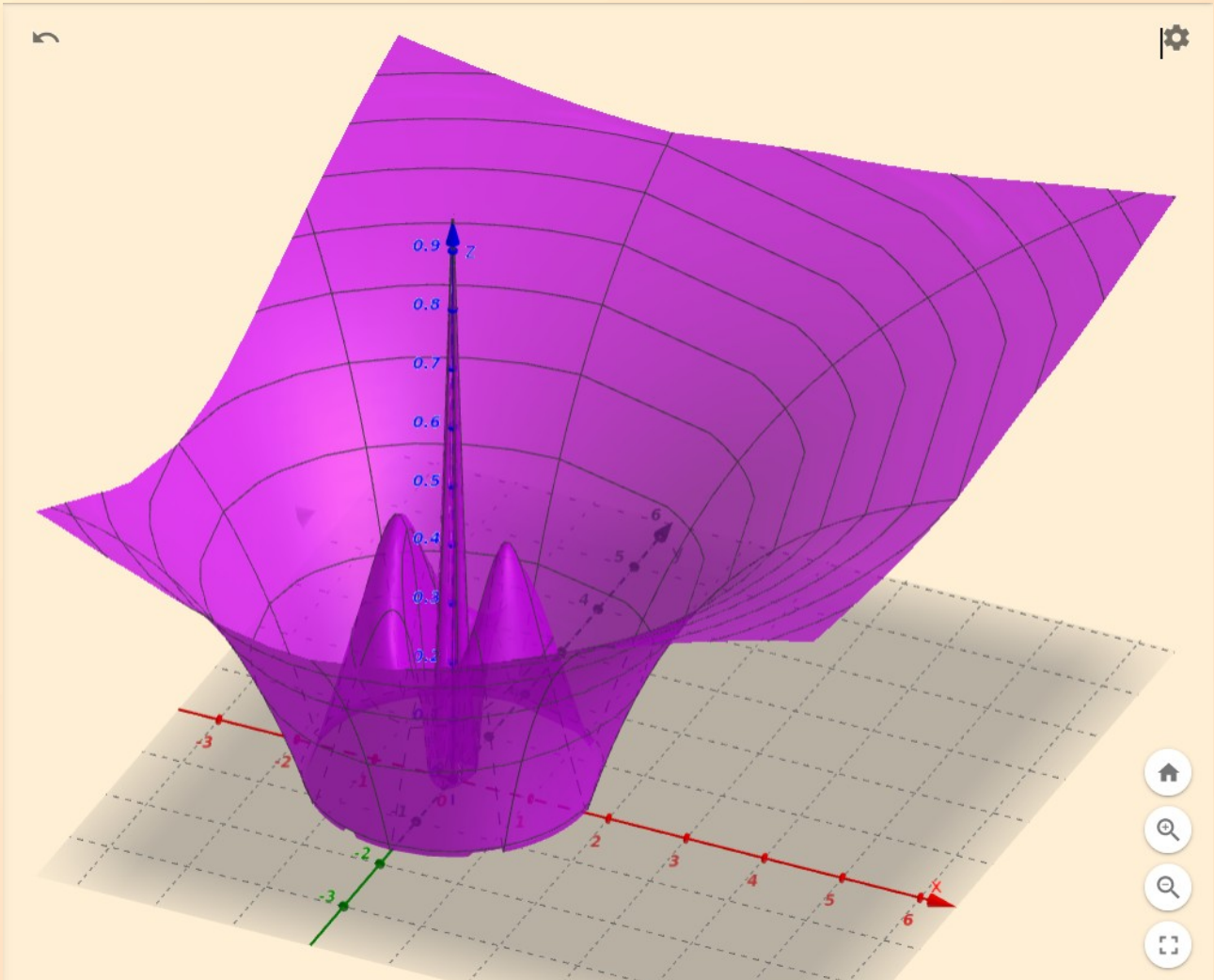


Abb. Inverse Zeitdilatation $\frac{1}{|g^{11}|}$ Kerr-Metrik in Zylinderkoordinaten, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei, [Kerr-Metrik](#)

5.8.4.4.2 Die Ergosphären

Die Gleichung $g_u = \frac{r_s \cdot r}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} - 1 = 0$ liefert die Form der **äußeren Ergosphäre**. Ersetzt man r

durch $r_{stat} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cdot \cos^2(\theta)}$ so erhält man: $g_u = \frac{r_s \cdot (M + \sqrt{M^2 - a^2 \cdot \cos^2(\theta)})}{(M + \sqrt{M^2 - a^2 \cdot \cos^2(\theta)})^2 + a^2 \cos^2(\theta)} - 1$ und damit

$$\frac{r_s \cdot (M + \sqrt{M^2 - a^2 \cdot \cos^2(\theta)})}{M^2 + 2 \cdot M \cdot \sqrt{M^2 - a^2 \cdot \cos^2(\theta)} + M^2 - a^2 \cdot \cos^2(\theta) + a^2 \cos^2(\theta)} = \frac{r_s \cdot (M + \sqrt{M^2 - a^2 \cdot \cos^2(\theta)})}{2 \cdot M^2 + 2 \cdot M \cdot \sqrt{M^2 - a^2 \cdot \cos^2(\theta)}} .$$

Da $r_s = 2M$ gilt, weil $c = G = 1$ ist, erhält man: $g_u = \frac{2 \cdot M^2 + 2 \cdot M \cdot \sqrt{M^2 - a^2 \cdot \cos^2(\theta)}}{2 \cdot M^2 + 2 \cdot M \cdot \sqrt{M^2 - a^2 \cdot \cos^2(\theta)}} - 1 = 0$.

Folgendes Bild zeigt Werte für r in Abhängigkeit des Winkels θ und des Parameters $0 \leq a \leq 1$.

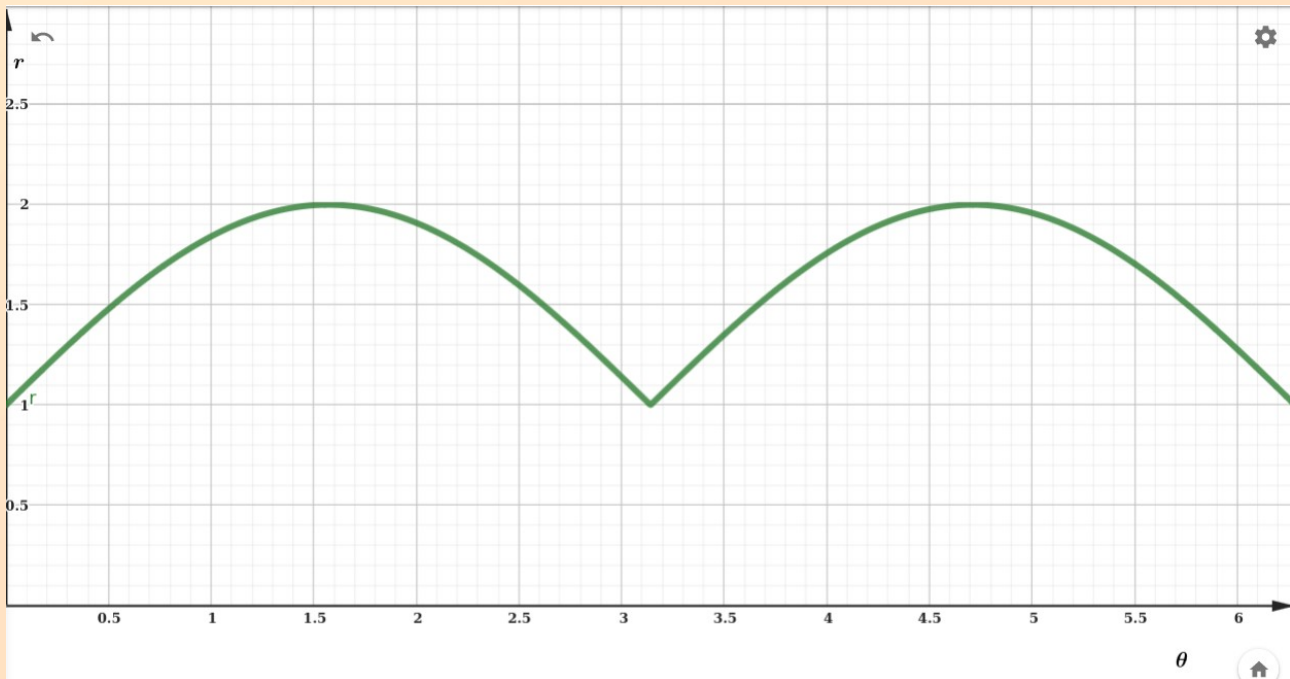
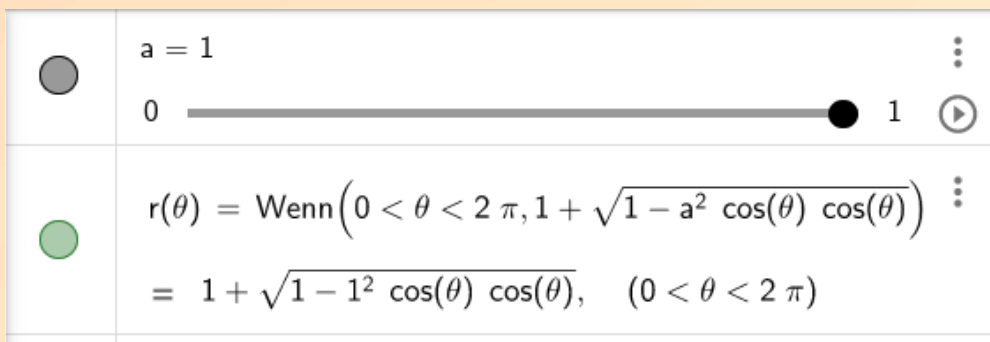


Abb. Der Radius r_{stat} in Abhängigkeit des Winkels θ , siehe auch <https://www.geogebra.org/calculator/rzwm6ddf>



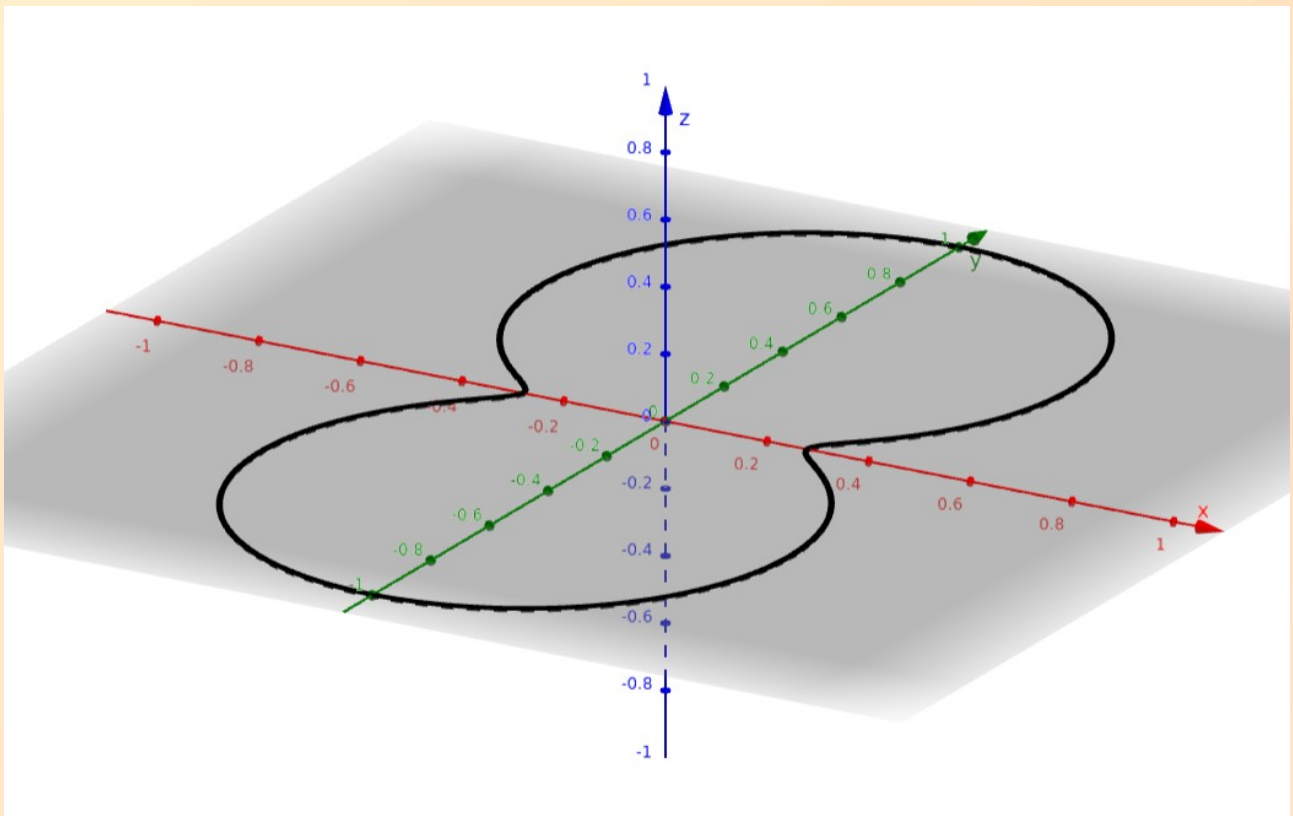
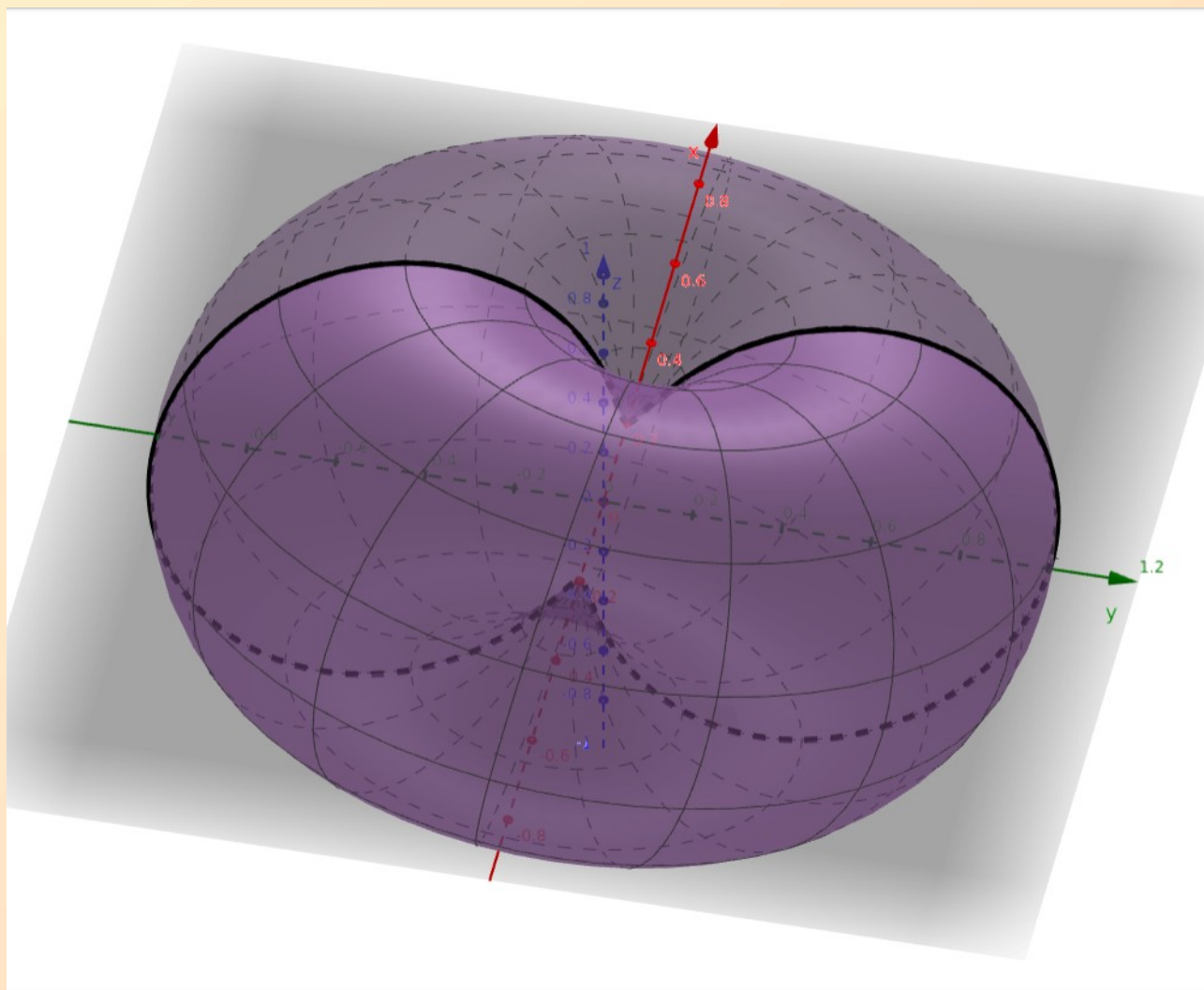


Abb. Schnitt durch die Ergosphäre, <https://www.geogebra.org/calculator/k5zgpetp>, für M wurde ein Gravitationsradius genommen, $c=G=1$









Dabei ist folgender Parameter für a benutzt worden:

| | | |
|-----------------------|--|---|
| <input type="radio"/> | $a = 0.96$ <div>0 <input type="range"/> 1</div> | ⋮ |
| <input type="radio"/> | $c = \text{Kurve}\left(\left(\sqrt{1 - a^2 \cos(\theta) \cos(\theta)}; \theta\right), \theta, 0, 2\pi\right)$ $= \left(\sqrt{1 - a^2 \cos(\theta) \cos(\theta)}; \theta\right), \quad (0 \leq \theta \leq 6.28)$ | ⋮ |



Ergosphäre, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei, <https://www.geogebra.org/calculator/k5zgpetp>

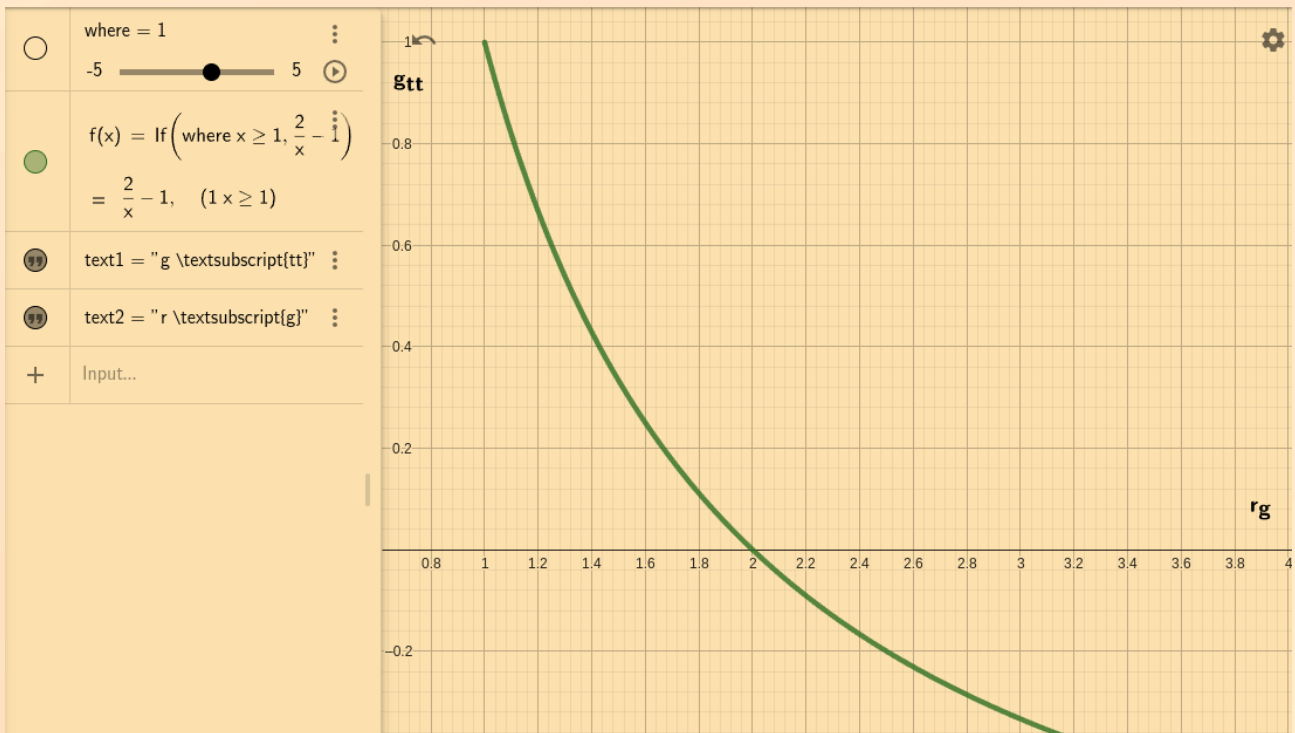
Dabei wurden folgende Parameter benutzt:

| | | |
|---|---|---|
|  | $a = 0.98$ <div>0  1 </div> |  |
|  | $c = \text{Kurve}\left(\left(\sqrt{1 - a^2 \cos(\theta) \cos(\theta)}; \theta\right), \theta, 0, 2\pi\right)$ $= \left(\sqrt{1 - a^2 \cos(\theta) \cos(\theta)}; \theta\right), \quad (0 \leq \theta \leq 6.28)$ |  |
|  | $b = \text{Oberfläche}(c, 180^\circ, \text{xAchse})$ $= \begin{pmatrix} \cos(u) \sqrt{1 - 0.98^2 \cos(u) \cos(u)} \\ \sin(u) \sqrt{1 - 0.98^2 \cos(u) \cos(u)} \cos(v) \\ \sin(u) \sqrt{1 - 0.98^2 \cos(u) \cos(u)} \sin(v) \end{pmatrix}$ |  |

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Man kann an der Gleichung auch leicht ablesen, was der Fall ist, wenn $a=0$ ist, also das Schwarze Loch nicht rotiert. Dann fällt die Ergoregion mit dem Schwarzschildradius zusammen, weil dann $g_u = \frac{r_s \cdot r}{r^2} - 1 = 0$ für $r = r_s$ gilt.

Im Fall $\theta = \frac{\pi}{2}$ wird $r_{stat} = 2 \cdot M$ und damit beginnt die äußere Ergosphäre immer bei zwei Gravitationsradien. Der Gravitationsradius ist durch $r_g = \frac{G \cdot M}{c^2}$ festgelegt. Da wir $G=c=1$ gesetzt haben, ist der Gravitationsradius $r_g = M$. Messen wir die Radien in Einheiten des Gravitationsradius, so kann man auch für den Radius r $r = x \cdot r_g$ schreiben. Bei $x=2$ erhält man dann den Schwarzschildradius. Somit ergibt sich $g_u = \frac{2 \cdot r_g \cdot x \cdot r_g}{x^2 \cdot r_g^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} - 1$. Da M die Masse des Schwarzen Lochs ist, normieren wir auch hier $M = 1$ zu einer Gravitationsradius-Einheit und erhalten dann $g_u = \frac{2 \cdot x}{x^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} - 1$. Weil die Ergosphäre immer bei 2 Gravitationsradien beginnt, können wir zu $g_u = \frac{2 \cdot x}{x^2} - 1 = \frac{2}{x} - 1$ vereinfachen. Ein Plot mit Geogebra zeigt dann folgendes Bild:



Bei zwei Gravitationsradiuseinheiten findet ein Vorzeichenwechsel statt. Physikalisch bedeutet das, dass aus der Koordinatenzeit t aus einer zeitartigen eine raumartige Koordinate wird.

Der äußere Rand der Ergosphäre ist kürbisförmig, während der innere Rand sich am äußeren Ereignishorizont in Form eines abgeplatteten Rotationsellipsoids anschließt. Den Bereich zwischen äußerer Ergosphäre und äußeren Ereignishorizont nennt man auch Ergoregion. Dort zwingt das rotierende Schwarze Loch allen Körpern und dem Licht seine Rotation auf. Diesen Effekt nennt

man Frame-Dragging. Ein Beobachter innerhalb der Ergosphäre würde den Fixsternhimmel rotierend wahrnehmen. Aber auch andere Effekte wie der [Penrose-Prozess](#) und der [Blandford-Znajek-Mechanismus](#) sind nur innerhalb der Ergoregion möglich.

Das Gedankenexperiment von Penrose geht davon aus, dass ein Teilchen, das in die Ergosphäre eintritt, dort z. B. durch einen radioaktiven Prozess zerfällt. Der eine Zerfallspartner fällt weiter ins Schwarze Loch, der andere Zerfallspartner entweicht der Ergoregion. Bei seinen Berechnungen kam heraus, dass der entweichende Partner mehr Energie hat, als der Zurückbleibende. Diesen Energieunterschied führte Penrose auf eine Abnahme der Rotationsenergie des Schwarzen Lochs zurück.

Am äußeren Ereignishorizont rotiert der Raum mit maximaler Geschwindigkeit. Sie beträgt die halbe Vakuum-Lichtgeschwindigkeit, wenn die Ergoregion bei $a=M$ am größten wird.⁵⁷

Schnell rotierende Schwarze Löcher haben für die Astronomie eine besondere Bedeutung. Da das Schwarze Loch Materie in seiner kosmischen Umgebung anzieht, wird sich diese zunächst um das Schwarze Loch sammeln. Man spricht dann von einer Akkretionsscheibe. Diese können bis in die Ergosphäre hereinreichen. Astronomen beobachten bei Aktiven Galaktischen Kernen (z. B. Quasare oder aktive Galaxienkerne) extrem schnelle Materieströme – die sogenannten Jets.

Eine Erklärung für die Jets könnte folgende sein: da die Materie in der Akkretionsscheibe die Rotation des Schwarzen Lochs übernimmt, entsteht ein gravitomagnetisches Feld. Dadurch können die Magnetfelder in der Akkretionsscheibe durch die stark rotierende Raumzeit sehr stark verdreht werden. Es entsteht ein Kurzschluss und die frei werdende Energie kann durch die Materie in der Akkretionsscheibe als kinetische Energie aufgenommen werden. Durch die Energieaufnahme kann die Materie dann aus dem Schwarzen Loch herausgeschleudert werden. Durch weitere Magnetfelder wird die Materie dann gebündelt und es entsteht ein nach außen gerichteter Materiejet.

Allerdings gibt es noch viele offene Fragen für die Erklärung der Jets, die man unter anderem mit Bildern von den Schwarzen Löchern untersuchen will. Dazu hat man das Event Horizon Telescope entwickelt, das aus einem Zusammenschluss unterschiedlicher Teleskope auf der Erde besteht. Mehr dazu erfährt man unter <https://eventhorizontelescope.org/>.

⁵⁷ (Bardeen, Press & Teukolsky 1972).

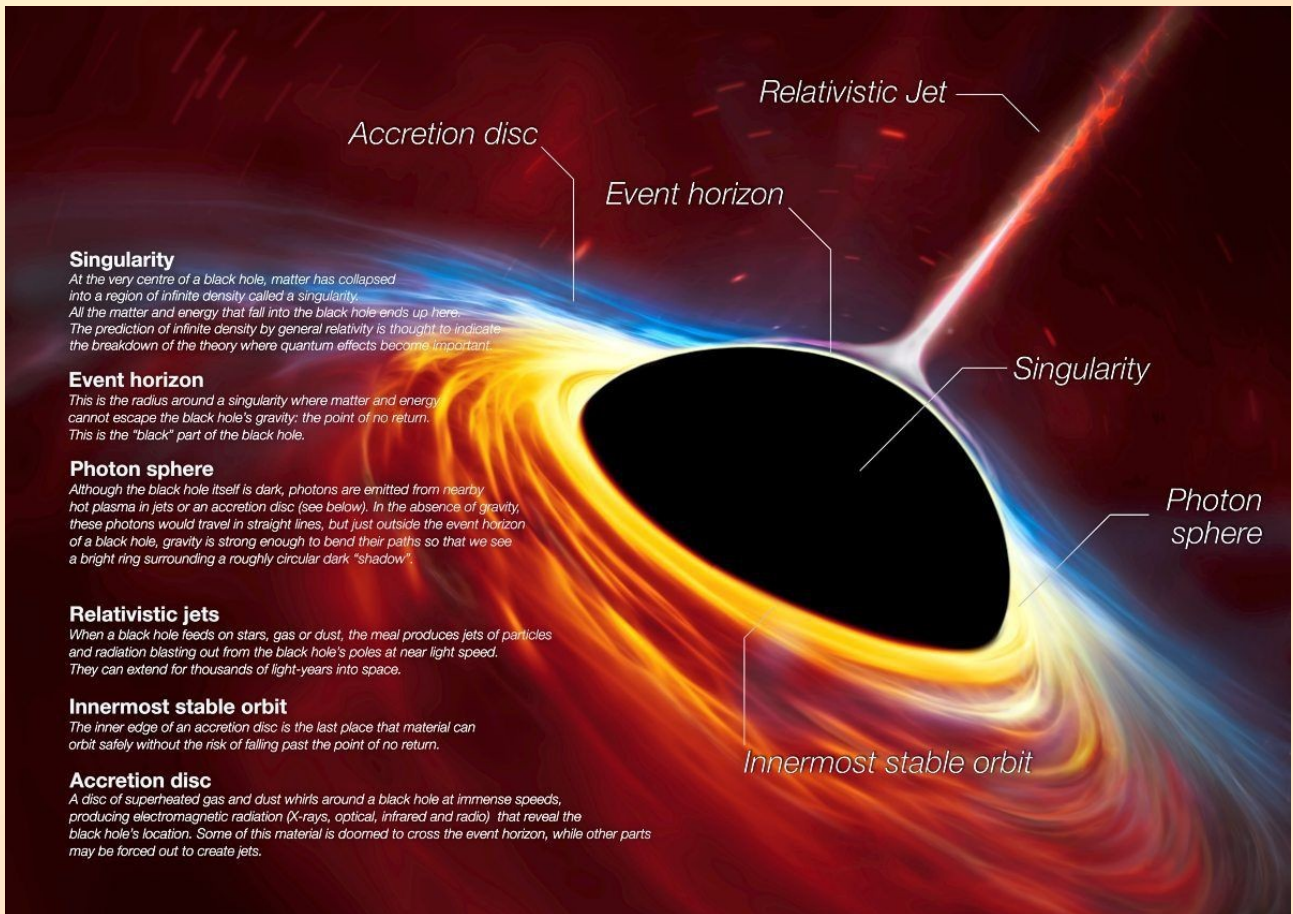


Bild ESO: eine schematische Darstellung eines rotierenden Schwarzen Lochs und seinem Jet.

5.8.4.4.3 Die Ringsingularität

Die Bedingung für die **Ringsingularität** lautet: $g_{tt} = \frac{r_s \cdot r}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} - 1 \rightarrow \infty$, was für

$r^2 + a^2 \cdot \cos^2(\theta) = 0$ der Fall ist. Der Parameter a ist wieder der Kerr-Parameter: $a = \frac{J}{M \cdot c}$ mit

Drehimpuls J und Masse des Schwarzen Lochs M . Mit den Einheiten $G=c=1$ variiert a zwischen $-M$ und M . Setzt man $M=1$, dann variiert er zwischen -1 und 1 . Kip Thorne⁵⁸ fand 1974 heraus, dass der Kerr-Parameter maximal $0,998$ beträgt.

Bei diesen Setzungen von $G=c=M=1$ ist die Variable r ein Vielfaches in der Einheit des Gravitationsradius $r_g = \frac{G \cdot M}{c^2}$. Dann ergibt sich: $r = a \cdot \cos(\theta)$. Zeichnet man die Punkte in der x - y -Ebene, so gilt $X = (r \cdot \cos(\theta), r \cdot \sin(\theta)) = a \cdot (\cos^2(\theta), \cos(\theta) \cdot \sin(\theta))$. Dies liefert folgenden Plot

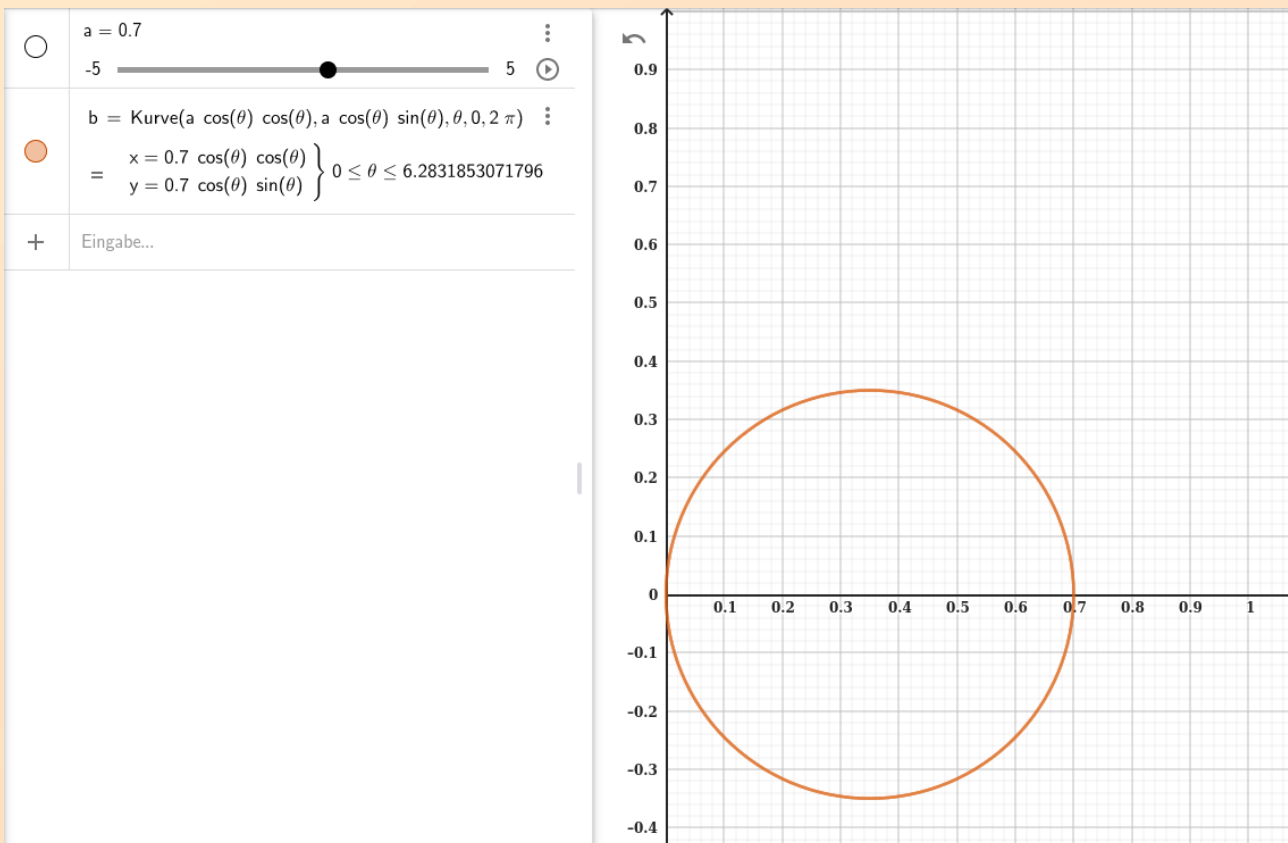


Abb. Ringsingularität Kerr-Metrik, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei

58 https://de.wikipedia.org/wiki/Kip_Thorne

5.8.4.4 Die Ereignishorizonte

Für $r^2 - 2 \cdot M \cdot r + a^2 = 0$ also $r_H^+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ bzw. $r_H^- = M - \sqrt{M^2 - a^2}$ wird der Nenner von $g_{rr} = \frac{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta}{r^2 - r_s \cdot r + a^2}$ ebenfalls Null, weil $r_s = 2 \cdot M$ ist. Damit haben wir zwei weitere Horizonte gefunden – den **äußeren Ereignishorizont** r_H^+ und den **inneren Ereignishorizont** oder Cauchy Horizont r_H^- .

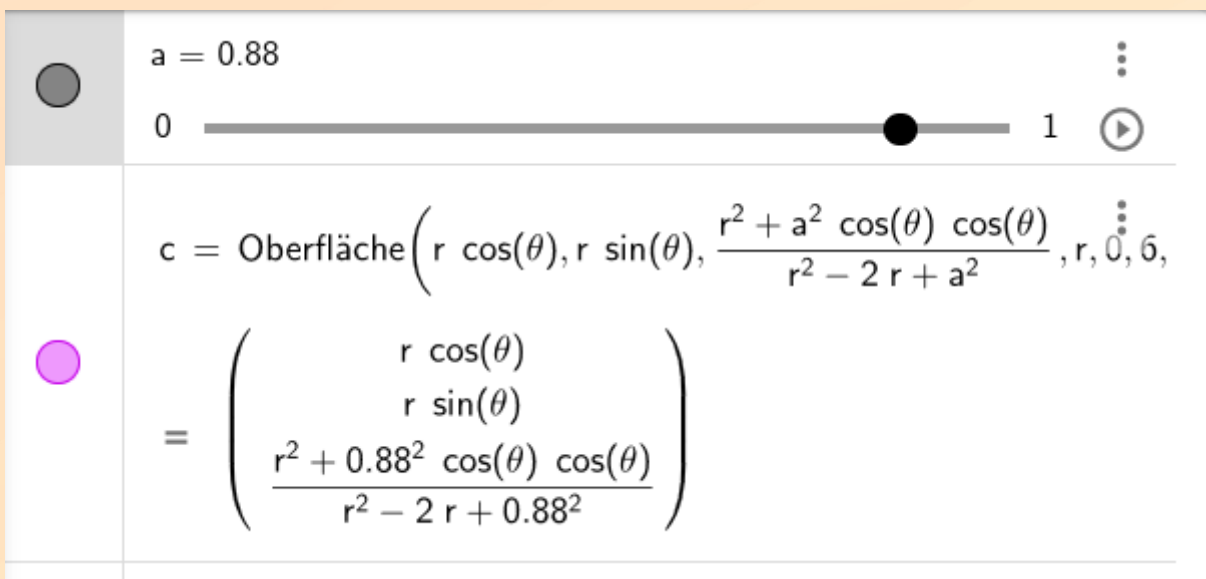
Wir hatten schon gesehen, dass Licht rotverschoben wird, wenn es von einem Stern abgestrahlt wird. Wird das Licht vom äußeren Ereignishorizont abgestrahlt, dann ist die Rotverschiebung auf die Frequenz bezogen gleich null oder Unendlich falls man sie auf die Wellenlänge bezieht. Man kann also nichts sehen.

Der innere Horizont ist eine Cauchy Hyperfläche, also eine dreidimensionale Untermannigfaltigkeit in der Raumzeit, die von einer kausalen Kurve genau einmal geschnitten wird. Kausale Kurven legen Materieteilchen oder Beobachter zurück. Sie sind nicht in die Vergangenheit fortsetzbar. Deshalb ist die Cauchy Hyperfläche auch nur in einer Richtung durchlässig.

Gelangt ein Beobachter hinter den Cauchy Horizont, dann gelangt er in eine Region unendlicher Blauverschiebung. Alles läuft gleichzeitig ab und der Beobachter wird von einem Strahlungsblitz getroffen und verglüht.

Wir hatten schon gesehen, dass der Cauchy Horizont eine Nullhyperfläche ist, an der die Metrik eine Singularität hat. Man spricht deshalb von singulären Nullhyperflächen. Einige Physiker vermuten, dass aufgrund dieser Eigenschaft ab dem Cauchy Horizont der Bereich der Quantengravitation beginnt, weil hier die Gleichungen der ART an der Singularität nicht existieren und über die zukünftige Entwicklung physikalischer Größen im Bereich hinter dem Cauchy Horizont nichts mehr ausgesagt werden kann.

Zeichnet man in Polarkoordinaten die entsprechenden Horizonte ein, dann erhält man folgende Grafik mit folgenden Parameter a:



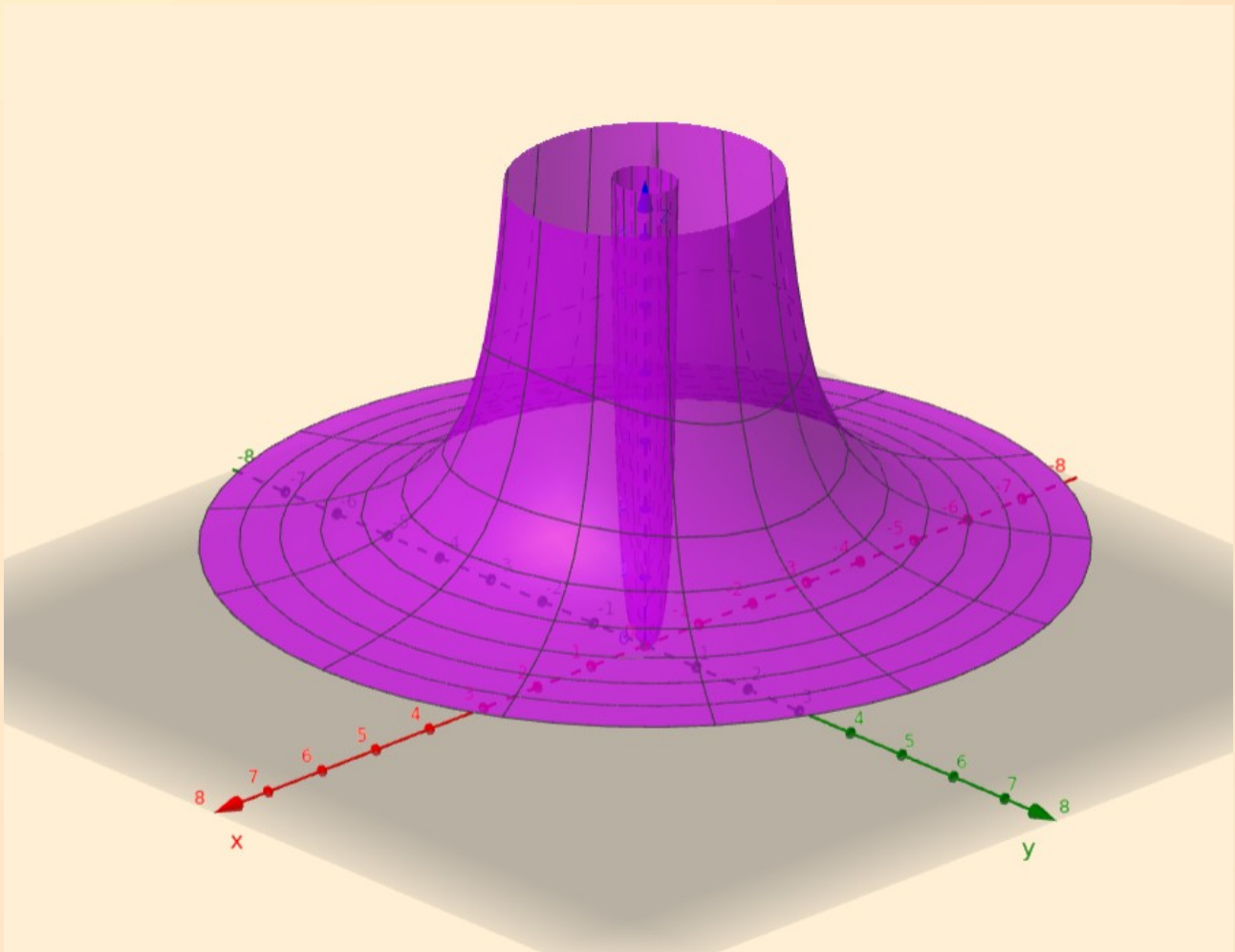


Abb Kerr-Metrik Ereignishorizont, Günter Opitz-Ohlsen, gemeinfrei <https://www.geogebra.org/calculator/rwhkb646>

5.8.4.5 Die Kerr-Newman-Metrik

Hat das rotierende Schwarze Loch eine Ladung Q , dann ist die **Kerr-Newman-Metrik** mit der Raumzeit-Signatur $(+, -, -, -)$ durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \frac{r_s \cdot r - Q^2}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} - 1 & 0 & 0 & \frac{a(Q^2 - r_s \cdot r) \cdot \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} \\ 0 & \frac{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta}{r^2 - r_s \cdot r + a^2 + Q^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta & 0 \\ \frac{a(Q^2 - r_s \cdot r) \cdot \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} & 0 & 0 & \frac{(a^2 + r^2)^2 - a^2(r^2 - r_s \cdot r + a^2 + Q^2) \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Mit den Ausdrücken

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta$$

$$a = \frac{J}{M} \quad J = \text{Drehimpuls}$$

$$\Delta = r^2 - r_s \cdot r + a^2 + Q^2$$

$$r_s = 2 \cdot M \quad r_s = \text{Schwarzschildradius}$$

$$\chi = (a^2 + r^2)^2 - a^2 \cdot \Delta \cdot \sin^2 \theta$$

erhält man die kürzere Form der Metrik:

$$g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \frac{r_s r - Q^2}{\Sigma} - 1 & 0 & 0 & \frac{a(Q^2 - r_s r) \sin^2 \theta}{\Sigma} \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ \frac{a(Q^2 - r_s r) \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & 0 & \frac{\chi \sin^2 \theta}{\Sigma} \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der weiteren Tensoren kann man dann folgendes Skript verwenden:

```
#Einstein Tensor Kerr-Newman-Metrik
version()
M = Manifold(4, 'M', structure='Lorentzian')
fr.<t,x,y,z> = M.chart(r't x y z')
var ('rs m Q a', domain='real')
g00(x,y)=(rs*x-Q^2)/(x^2+a^2*(cos(y))^2) -1
g03(x,y)=(a*(Q^2-rs*x)*(sin(y))^2)/(x^2+a^2*(cos(y))^2)
g30(x,y)=(a*(Q^2-rs*x)*(sin(y))^2)/(x^2+a^2*(cos(y))^2)
g11(x,y)=(x^2+a^2*(cos(y))^2)/(x^2-rs*x+a^2+Q^2)
g22(x,y)=(x^2+a^2*(cos(y))^2)
g33(x,y)=(((a^2+x^2)^2 -a^2*(x^2-rs*x+a^2+Q^2)*(sin(y))^2)*(sin(y))^2)/(x^2+a^2*(cos(y))^2)
g=M.metric()
g[0,0]=g00(x,y)
g[0,3]=g03(x,y)
g[3,0]=g03(x,y)
g[1,1]=g11(x,y)
g[2,2]=g22(x,y)
g[3,3]=g33(x,y)
```

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

```
print("*****");
print("*****Kerr-Newman-Metrik*****");
print("*****");
latex(g[:])
h=g.inverse()
print("*****");
print("*****InverseKerrNewmanMetrik*****");
print("*****");
latex(h[:])
nabla = g.connection()
print("*****");
print("*****ChristoffelSymbole*****");
print("*****");
latex(g.christoffel_symbols_display())
Ricci = nabla.ricci()
print("*****");
print("*****RicciTensor*****");
print("*****");
latex(Ricci[:])
Ricci_scalar= g.ricci_scalar()
print("*****");
print("*****RicciScalar*****");
print("*****");
latex(Ricci_scalar.display())
```

Das Ergebnis ist ein Latex-Skript, das z. B. angepasst an TexWorks umgewandelt in ein PDF-File werden kann.

```
% \documentclass[8pt a3paper]{article}
\documentclass{scrartcl}

\usepackage{amsmath}
\usepackage{graphicx}
\usepackage{hyperref}
\usepackage[latin1]{inputenc}
% \usepackage[ngerman]{babel}
\usepackage{pdfpages}

\KOMAOptions{paper=A1,paper=landscape,pagesize}
\recalctypearea

\title{Einstaintensor Kerr Newman Metrik}
\author{Guenter Opitz-Ohlsen}
\date{03.04.2024}

\begin{document}
\maketitle{Einstaintensor Kerr-Metrik}
```

\section{Kerr-Metrik}

\\$left(\begin{array}{rrrr}

-\frac{Q^2 - \mathit{rs} \ x}{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2} - 1 \ & 0 \ & 0 \ & \\ \frac{\left(Q^2 - \mathit{rs} \ x\right)}{a \sin\left(y\right)^2} \{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2\} \ & \\ 0 \ & \frac{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2}{Q^2 + a^2 - \mathit{rs} \ x + x^2} \ & 0 \ & 0 \ \backslash

0 \ & 0 \ & a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2 \ & 0 \ \backslash \\ \frac{\left(Q^2 - \mathit{rs} \ x\right)}{a \sin\left(y\right)^2} \{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2\} \ & 0 \ & 0 \ & -\frac{\left(\left(Q^2 + a^2 - \mathit{rs} \ x + x^2\right)\right)}{a^2 \sin\left(y\right)^2 - \left(a^2 + x^2\right)} \sin\left(y\right)^2 \{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2\}

\end{array}\right)\\$

\section{Inverse Kerr-Metrik}

\\$left(\begin{array}{rrrr}

\frac{a^4 + 2 \ , \ a^2 \ x^2 + x^4}{- \left(Q^2 a^2 + a^4 - a^2 \mathit{rs} \ x + a^2 x^2\right)} \sin\left(y\right)^2 \{ \mathit{rs} \ x^3 - x^4 - \left(Q^2 + a^2\right) x^2 - \left(Q^2 a^2 + a^4 - a^2 \mathit{rs} \ x + a^2 x^2\right) \cos\left(y\right)^2 \} \ & 0 \ & 0 \ & -\frac{Q^2 a - a \mathit{rs} \ x}{\mathit{rs} \ x^3 - x^4 - \left(Q^2 + a^2\right) x^2 - \left(Q^2 a^2 + a^4 - a^2 \mathit{rs} \ x + a^2 x^2\right) \cos\left(y\right)^2} \ \backslash \\ 0 \ & \frac{Q^2 + a^2 - \mathit{rs} \ x + x^2}{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2} \ & 0 \ & 0 \ \backslash

0 \ & 0 \ & \frac{1}{a^2 \cos\left(y\right)^2 + x^2} \ & 0 \ \backslash \\ -\frac{Q^2 a - a \mathit{rs} \ x}{\mathit{rs} \ x^3 - x^4 - \left(Q^2 + a^2\right) x^2 - \left(Q^2 a^2 + a^4 - a^2 \mathit{rs} \ x + a^2 x^2\right) \cos\left(y\right)^2} \ & 0 \ & 0 \ & -\frac{a^2 \cos\left(y\right)^2 + Q^2 - \mathit{rs} \ x + x^2}{\left(Q^2 a^2 + a^4 - a^2 \mathit{rs} \ x + a^2 x^2\right) \cos\left(y\right)^4 + \mathit{rs} \ x^3 - x^4 - \left(Q^2 + a^2\right) x^2 - \left(Q^2 a^2 + a^4 - a^2 \mathit{rs} \ x - Q^2 x^2 + \mathit{rs} \ x^3 - x^4\right) \cos\left(y\right)^2} \ \backslash

\end{array}\right)\\$

\section{Christoffel Symbole}

\\$begin{array}{lcl} \Gamma_{ }^{ } \ & = \ & \frac{a^4 \mathit{rs} + 2 \ , \ Q^2 a^2 x + 2 \ , \ Q^2 x^3 - \mathit{rs} \ x^4 - \left(a^4 \mathit{rs} + a^2 \mathit{rs} \ x^2\right) \sin\left(y\right)^2}{\left(\mathit{rs} \ x^5 - x^6 - \left(Q^2 + a^2\right) x^4 - \left(Q^2 a^4 + a^6 - a^4 \mathit{rs} \ x + a^4 x^2\right) \cos\left(y\right)^4 + 2 \ , \ \left(a^2 \mathit{rs} \ x^3 - a^2 x^4 - \left(Q^2 a^2 + a^4\right) x^2\right) \cos\left(y\right)^2\right)} \ \backslash \Gamma_{ }^{ } \ & = \ & \frac{\left(Q^2 a^2 - a^2 \mathit{rs} \ x\right) \cos\left(y\right) \sin\left(y\right)}{a^4 \cos\left(y\right)^4 + 2 \ , \ a^2 x^2 \cos\left(y\right)^2 + x^4} \ \backslash \Gamma_{ }^{ } \ & = \ & \frac{\left(a^5 \mathit{rs} + 2 \ , \ Q^2 a^3 x - a^3 \mathit{rs} \ x^2\right) \sin\left(y\right)^4 - \left(a^5 \mathit{rs} + 4 \ , \ Q^2 a^3 x - 2 \ , \ a^3 \mathit{rs} \ x^2 + 4 \ , \ Q^2 a x^3 - 3 \ , \ a \mathit{rs} \ x^4\right) \sin\left(y\right)^2}{2 \ , \ \left(\mathit{rs} \ x^5 - x^6 - \left(Q^2 + a^2\right) x^4 - \left(Q^2 a^4 + a^6 - a^4 \mathit{rs} \ x + a^4 x^2\right) \cos\left(y\right)^4 + 2 \ , \ \left(a^2 \mathit{rs} \ x^3 - a^2 x^4 - \left(Q^2 a^2 + a^4\right) x^2\right) \cos\left(y\right)^2\right)} \end{array}

[illegible]

$$\begin{aligned} & \cos^2(y) + x^2 \parallel \Gamma_{ \backslash, y \backslash, y}^{ \backslash, y \backslash, y} \& = \& -\frac{a^2}{\cos(y) \sin(y)} \{a^2 \cos^2(y) + x^2\} \parallel \Gamma_{ \backslash, z \backslash, z}^{ \backslash, y \backslash, z} \\ & \& = \& -\frac{\{ \left(Q^2 a^4 + a^6 - a^4 \mathit{rs} x + a^4 x^2 \right) \cos^5(y) - 2 \{ \left(a^2 \mathit{rs} x^3 - a^2 x^4 - \right. \\ & \left. \left(Q^2 a^2 + a^4 \right) x^2 \right) \cos^3(y) - \{ \left(Q^2 a^4 - a^4 \mathit{rs} x + 2 \{ Q^2 a^2 x^2 - 2 \{ a^2 \mathit{rs} x^3 - a^2 x^4 - \right. \\ & \left. x^6 \right) \cos(y) \right) \sin(y) \} a^6 \cos^6(y) + 3 \{ a^4 x^2 \cos^4(y) + 3 \{ a^2 x^4 \cos^2(y) + x^6 \} \parallel \\ & \Gamma_{ \backslash, t \backslash, x}^{ \backslash, z \backslash, t \backslash, x} \& = \& \frac{a^3}{\mathit{rs} \cos^2(y) + 2 \{ Q^2 a x - a \mathit{rs} x^2 \}^2 \{ \left(\mathit{rs} x^5 - x^6 - \right. \\ & \left. \left(Q^2 + a^2 \right) x^4 - \left(Q^2 a^4 + a^6 - a^4 \mathit{rs} x + a^4 x^2 \right) \cos^4(y) + 2 \{ \left(a^2 \mathit{rs} x^3 - a^2 x^4 - \right. \right. \\ & \left. \left. \left(Q^2 a^2 + a^4 \right) x^2 \right) \cos^2(y) \right) \} \parallel \Gamma_{ \backslash, t \backslash, y}^{ \backslash, z \backslash, t \backslash, y} \& = \& - \\ & \frac{\{ \left(Q^2 a - a \mathit{rs} x \right) \cos(y) \sin(y) \} a^4 \cos^6(y) - \{ \left(a^4 - 2 \{ a^2 x^2 \right) \cos^4(y) - x^4 - \} \left(2 \{ a^2 x^2 - x^4 \right) \cos^2(y) \} \parallel \Gamma_{ \backslash, x \backslash, z}^{ \backslash, z \backslash, x \backslash, z} \\ & \& = \& -\frac{2 \{ Q^2 a^2 x - a^2 \mathit{rs} x^2 + 2 \{ Q^2 x^3 - 2 \{ \mathit{rs} x^4 + 2 \{ x^5 - \{ \left(a^4 \mathit{rs} - 2 \{ a^4 x \right) \cos^4(y) + \{ \left(a^4 \mathit{rs} - a^2 \mathit{rs} x^2 + 4 \{ a^2 x^3 \right) \cos^2(y) \}^2 \{ \left(\mathit{rs} x^5 - x^6 - \{ \left(Q^2 + a^2 \right) x^4 - \{ \left(Q^2 a^4 + a^6 - a^4 \mathit{rs} x + a^4 x^2 \right) \cos^4(y) + 2 \{ \left(a^2 \mathit{rs} x^3 - a^2 x^4 - \{ \left(Q^2 a^2 + a^4 \right) x^2 \right) \cos^2(y) \right) \} \parallel \Gamma_{ \backslash, y \backslash, z}^{ \backslash, z \backslash, y \backslash, z} \\ & \& = \& -\frac{\{ \left(a^4 \cos^5(y) + \{ \left(Q^2 a^2 - a^2 \mathit{rs} x + 2 \{ a^2 x^2 \right) \cos^3(y) - \{ \left(Q^2 a^2 - a^2 \mathit{rs} x - x^4 \right) \cos(y) \right) \sin(y) \} a^4 \cos^6(y) - \{ \left(a^4 - 2 \{ a^2 x^2 \right) \cos^4(y) - x^4 - \{ \left(2 \{ a^2 x^2 - x^4 \right) \cos^2(y) \} \end{array} \} \\ \text{\section{RicciTensor}} \\ \text{\$left(\begin{array}{l} \\ \\ \frac{Q^2 a^4 \sin^6(y) + \{ \left(Q^4 a^2 - Q^2 a^2 \mathit{rs} x \right) \sin^4(y) - \{ \left(Q^4 a^2 + Q^2 a^4 - Q^2 a^2 \mathit{rs} x - Q^2 \mathit{rs} x^3 + Q^2 x^4 + \{ \left(Q^4 + 2 \{ Q^2 a^2 \right) x^2 \right) \sin^2(y) \} a^8 \cos^{10}(y) - \{ \left(a^8 - 4 \{ a^6 x^2 \right) \cos^8(y) - x^8 - 2 \{ \left(2 \{ a^6 x^2 - 3 \{ a^4 x^4 \right) \cos^6(y) - 2 \{ \left(3 \{ a^4 x^4 - 2 \{ a^2 x^6 \right) \cos^4(y) - \{ \left(4 \{ a^2 x^6 - x^8 \right) \cos^2(y) \} \& 0 \& 0 \& -\frac{\{ \left(Q^4 a^3 + 2 \{ Q^2 a^5 - Q^2 a^3 \mathit{rs} x + 2 \{ Q^2 a^3 x^2 \right) \sin^6(y) - \{ \left(Q^4 a^3 + 2 \{ Q^2 a^5 - Q^2 a^3 \mathit{rs} x - Q^2 a \mathit{rs} x^3 + 2 \{ Q^2 a x^4 + \{ \left(Q^4 a + 4 \{ Q^2 a^3 \right) x^2 \right) \sin^4(y) \} a^8 \cos^{10}(y) - \{ \left(a^8 - 4 \{ a^6 x^2 \right) \cos^8(y) - x^8 - 2 \{ \left(2 \{ a^6 x^2 - 3 \{ a^4 x^4 \right) \cos^6(y) - 2 \{ \left(3 \{ a^4 x^4 - 2 \{ a^2 x^6 \right) \cos^4(y) - \{ \left(4 \{ a^2 x^6 - x^8 \right) \cos^2(y) \} \parallel} \\ \end{array} \} \parallel} \end{aligned}$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

```

0 & \frac{Q^{2}}{\mathit{rs}} x^{3} - x^{4} - \left(Q^{2} + a^{2}\right) x^{2} - \left(Q^{2} a^{2} + a^{4} - a^{2} \mathit{rs} x + a^{2} x^{2}\right) \cos \left(y\right)^{2} \} & 0 & 0 \backslash \\
0 & 0 & \frac{Q^{2}}{a^{2}} \cos \left(y\right)^{2} + x^{2} \} & 0 \backslash \\
-\frac{\left\{\left(Q^{4} a^{3} + 2 \mathit{rs} Q^{2} a^{5} - Q^{2} a^{3} \mathit{rs} x + 2 \mathit{rs} Q^{2} a^{3} x^{2}\right) \sin \left(y\right)^{6} - \left(Q^{4} a^{3} + 2 \mathit{rs} Q^{2} a^{5} - Q^{2} a^{3} \mathit{rs} x - Q^{2} a \mathit{rs} x^{3} + 2 \mathit{rs} Q^{2} a x^{4} + \left(Q^{4} a + 4 \mathit{rs} Q^{2} a^{3}\right) x^{2}\right) \sin \left(y\right)^{4}\right\} a^{8} \cos \left(y\right)^{10} - \left(a^{8} - 4 \mathit{rs} a^{6} x^{2}\right) \cos \left(y\right)^{8} - x^{8} - 2 \mathit{rs} \left(2 \mathit{rs} a^{6} x^{2} - 3 \mathit{rs} a^{4} x^{4}\right) \cos \left(y\right)^{6} - 2 \mathit{rs} \left(3 \mathit{rs} a^{4} x^{4} - 2 \mathit{rs} a^{2} x^{6}\right) \cos \left(y\right)^{4} - \left(4 \mathit{rs} a^{2} x^{6} - x^{8}\right) \cos \left(y\right)^{2} \} & 0 & 0 & - \\
\frac{\left\{\left(Q^{4} a^{4} + Q^{2} a^{6} - Q^{2} a^{4} \mathit{rs} x + Q^{2} a^{4} x^{2}\right) \sin \left(y\right)^{6} - \left(Q^{4} a^{4} - Q^{2} a^{4} \mathit{rs} x + Q^{4} a^{2} x^{2} - Q^{2} a^{2} \mathit{rs} x^{3}\right) \sin \left(y\right)^{4} - \left(Q^{2} a^{6} + 3 \mathit{rs} Q^{2} a^{4} x^{2} + 3 \mathit{rs} Q^{2} a^{2} x^{4} + Q^{2} x^{6}\right) \sin \left(y\right)^{2}\right\} a^{8} \cos \left(y\right)^{8} + 4 \mathit{rs} a^{6} x^{2} \cos \left(y\right)^{6} + 6 \mathit{rs} a^{4} x^{4} \cos \left(y\right)^{4} + 4 \mathit{rs} a^{2} x^{6} \cos \left(y\right)^{2} + x^{8} \} \\
\end{array} \right) \$
\section{Ricciscalar}
\begin{array}{llcl} \left(t, x, y, z\right) & \longmapsto & 0 \end{array} \$
\end{document}

```

Es stellt sich heraus, dass der Ricciskalar verschwindet. Der Einsteintensor ist also gleich dem Riccictensor. Hier noch einmal die Ergebnisse:

Metriktenor Kerr-Newman-Metrik

$$\begin{pmatrix}
 -\frac{Q^2-rsx}{a^2 \cos(y)^2+x^2} - 1 & 0 & 0 & \frac{(Q^2-rsx)a \sin(y)^2}{a^2 \cos(y)^2+x^2} \\
 0 & \frac{a^2 \cos(y)^2+x^2}{Q^2+a^2-rsx+x^2} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a^2 \cos(y)^2+x^2 & 0 \\
 \frac{(Q^2-rsx)a \sin(y)^2}{a^2 \cos(y)^2+x^2} & 0 & 0 & -\frac{\left((Q^2+a^2-rsx+x^2)a^2 \sin(y)^2-(a^2+x^2)^2\right) \sin(y)^2}{a^2 \cos(y)^2+x^2}
 \end{pmatrix}$$

1.-3. Spalte Inverse Kerr-Newman-Metrik

$$\begin{pmatrix} \frac{a^4+2a^2x^2+x^4-(Q^2a^2+a^4-a^2rsx+a^2x^2)\sin(y)^2}{rsx^3-x^4-(Q^2+a^2)x^2-(Q^2a^2+a^4-a^2rsx+a^2x^2)\cos(y)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{Q^2+a^2-rsx+x^2}{a^2\cos(y)^2+x^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a^2\cos(y)^2+x^2} \\ -\frac{Q^2a-arxs}{rsx^3-x^4-(Q^2+a^2)x^2-(Q^2a^2+a^4-a^2rsx+a^2x^2)\cos(y)^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Spalte Inverse Kerr-Newman-Metrik

$$\begin{pmatrix} -\frac{Q^2a-arxs}{rsx^3-x^4-(Q^2+a^2)x^2-(Q^2a^2+a^4-a^2rsx+a^2x^2)\cos(y)^2} & 0 \\ 0 & \frac{a^2\cos(y)^2+Q^2-rsx+x^2}{(Q^2a^2+a^4-a^2rsx+a^2x^2)\cos(y)^4+rsx^3-x^4-(Q^2+a^2)x^2-(Q^2a^2+a^4-a^2rsx-Q^2x^2+rsx^3-x^4)\cos(y)^2} \end{pmatrix}$$

Christoffel-Symbole Teil 1:

3 Christoffel Symbole

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{tx} &= \frac{a^4rs+2Q^2a^2x+2Q^2x^3-rsx^4-(a^4rs+a^2rsx^2)\sin(y)^2}{2(rsx^5-x^6-(Q^2+a^2)x^4-(Q^2a^4+a^6-a^4rsx+a^4x^2)\cos(y)^4+2(a^2rsx^3-a^2x^4-(Q^2a^2+a^4)x^2)\cos(y)^2)} \\ \Gamma^t_{ty} &= \frac{(Q^2a^2-a^2rsx)\cos(y)\sin(y)}{a^4\cos(y)^4+2a^2x^2\cos(y)^2+x^4} \\ \Gamma^t_{xz} &= \frac{(a^5rs+2Q^2a^3x-a^3rsx^2)\sin(y)^4-(a^5rs+4Q^2a^3x-2a^3rsx^2+4Q^2ax^3-3arxsx^4)\sin(y)^2}{2(rsx^5-x^6-(Q^2+a^2)x^4-(Q^2a^4+a^6-a^4rsx+a^4x^2)\cos(y)^4+2(a^2rsx^3-a^2x^4-(Q^2a^2+a^4)x^2)\cos(y)^2)} \\ \Gamma^t_{yz} &= \frac{(Q^2a^5-a^5rsx)\cos(y)\sin(y)^5-(Q^2a^5-a^5rsx+Q^2a^3x^2-a^3rsx^3)\cos(y)\sin(y)^3}{a^6\cos(y)^6+3a^4x^2\cos(y)^4+3a^2x^4\cos(y)^2+x^6} \\ \Gamma^x_{tt} &= \frac{rsx^4+(3Q^2+a^2)rsx^2-(2Q^2+rs^2)x^3+(a^2rs^2x-a^2rsx^2-(Q^2a^2+a^4)rs)\cos(y)^2-2(Q^4+Q^2a^2)x}{2(a^6\cos(y)^6+3a^4x^2\cos(y)^4+3a^2x^4\cos(y)^2+x^6)} \\ \Gamma^x_{tz} &= -\frac{(arxsx^4+(3Q^2a+a^3)rsx^2-(2Q^2a+ars^2)x^3+(a^3rs^2x-a^3rsx^2-(Q^2a^3+a^5)rs)\cos(y)^2-2(Q^4a+Q^2a^3)x)\sin(y)^2}{2(a^6\cos(y)^6+3a^4x^2\cos(y)^4+3a^2x^4\cos(y)^2+x^6)} \\ \Gamma^x_{xx} &= -\frac{a^2rs+2Q^2x-rsx^2-(a^2rs-2a^2x)\sin(y)^2}{2(rsx^3-x^4-(Q^2+a^2)x^2-(Q^2a^2+a^4-a^2rsx+a^2x^2)\cos(y)^2)} \\ \Gamma^x_{xy} &= -\frac{a^2\cos(y)\sin(y)}{a^2\cos(y)^2+x^2} \\ \Gamma^x_{yy} &= \frac{rsx^2-x^3-(Q^2+a^2)x}{a^2\cos(y)^2+x^2} \end{aligned}$$

Christoffel-Symbole Teil 2:

$$\Gamma^x_{zz} = \frac{(3a^4rsx^2 - 2a^4x^3 + (Q^2a^4 + a^6)rs - (2Q^2a^4 + 2a^6 + a^4rs^2)x) \sin(y)^6}{}$$

$$- (3a^2rsx^4 - 4a^2x^5 - (3Q^2a^2 - 4a^4)rsx^2 -$$

...

$$\frac{-(2Q^2a^2 + 8a^4 - a^2rs^2)x^3 + (Q^2a^4 + a^6)rs + (2Q^4a^2 - 2Q^2a^4 - 4a^6 - a^4rs^2)x \sin(y)^4}{2(a^6 \cos(y)^6 + 3a^4x^2 \cos(y)^4 + 3a^2x^4 \cos(y)^2 + x^6)}$$

...

$$+ 2(a^4rsx^2 + 2a^2rsx^4 + rsx^6 - x^7 - (Q^2 + 3a^2)x^5 - (2Q^2a^2 + 3a^4)x^3 - (Q^2a^4 + a^6)x) \sin(y)^2$$

...

$$+ 2(a^4rsx^2 + 2a^2rsx^4 + rsx^6 - x^7 - (Q^2 + 3a^2)x^5 - (2Q^2a^2 + 3a^4)x^3 - (Q^2a^4 + a^6)x) \sin(y)^2$$

Christoffel-Symbole Teil 3

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{tt}^y &= \frac{(Q^2 a^2 - a^2 rsx) \cos(y) \sin(y)}{a^6 \cos(y)^6 + 3 a^4 x^2 \cos(y)^4 + 3 a^2 x^4 \cos(y)^2 + x^6} \\
 \Gamma_{tz}^y &= -\frac{(Q^2 a^3 - a^3 rsx + Q^2 a x^2 - a rsx^3) \cos(y) \sin(y)}{a^6 \cos(y)^6 + 3 a^4 x^2 \cos(y)^4 + 3 a^2 x^4 \cos(y)^2 + x^6} \\
 \Gamma_{xx}^y &= -\frac{a^2 \cos(y) \sin(y)}{rsx^3 - x^4 - (Q^2 + a^2)x^2 - (Q^2 a^2 + a^4 - a^2 rsx + a^2 x^2) \cos(y)^2} \\
 \Gamma_{xy}^y &= \frac{x}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} \\
 \Gamma_{yy}^y &= -\frac{a^2 \cos(y) \sin(y)}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} \\
 \Gamma_{zz}^y &= -\frac{((Q^2 a^4 + a^6 - a^4 rsx + a^4 x^2) \cos(y)^5 - 2(a^2 rsx^3 - a^2 x^4 - (Q^2 a^2 + a^4)x^2) \cos(y)^3 - (Q^2 a^4 - a^4 rsx + 2 Q^2 a^2 x^2 - 2 a^2 rsx^3 - a^2 x^4 - x^6) \cos(y)) \sin(y)}{a^6 \cos(y)^6 + 3 a^4 x^2 \cos(y)^4 + 3 a^2 x^4 \cos(y)^2 + x^6} \\
 \Gamma_{tx}^z &= \frac{a^3 rs \cos(y)^2 + 2 Q^2 ax - a rsx^2}{2(rsx^5 - x^6 - (Q^2 + a^2)x^4 - (Q^2 a^4 + a^6 - a^4 rsx + a^4 x^2) \cos(y)^4 + 2(a^2 rsx^3 - a^2 x^4 - (Q^2 a^2 + a^4)x^2) \cos(y)^2)} \\
 \Gamma_{ty}^z &= -\frac{(Q^2 a - a rsx) \cos(y) \sin(y)}{a^4 \cos(y)^6 - (a^4 - 2 a^2 x^2) \cos(y)^4 - x^4 - (2 a^2 x^2 - x^4) \cos(y)^2} \\
 \Gamma_{xz}^z &= -\frac{2 Q^2 a^2 x - a^2 rsx^2 + 2 Q^2 x^3 - 2 rsx^4 + 2 x^5 - (a^4 rs - 2 a^4 x) \cos(y)^4 + (a^4 rs - a^2 rsx^2 + 4 a^2 x^3) \cos(y)^2}{2(rsx^5 - x^6 - (Q^2 + a^2)x^4 - (Q^2 a^4 + a^6 - a^4 rsx + a^4 x^2) \cos(y)^4 + 2(a^2 rsx^3 - a^2 x^4 - (Q^2 a^2 + a^4)x^2) \cos(y)^2)} \\
 \Gamma_{yz}^z &= -\frac{(a^4 \cos(y)^5 + (Q^2 a^2 - a^2 rsx + 2 a^2 x^2) \cos(y)^3 - (Q^2 a^2 - a^2 rsx - x^4) \cos(y)) \sin(y)}{a^4 \cos(y)^6 - (a^4 - 2 a^2 x^2) \cos(y)^4 - x^4 - (2 a^2 x^2 - x^4) \cos(y)^2}
 \end{aligned}$$

1. Spalte Riccitenor

4 Riccitenor

$$\left(\begin{array}{c} \frac{Q^2 a^4 \sin(y)^6 + (Q^4 a^2 - Q^2 a^2 rsx) \sin(y)^4 - (Q^4 a^2 + Q^2 a^4 - Q^2 a^2 rsx - Q^2 rsx^3 + Q^2 x^4 + (Q^4 + 2 Q^2 a^2)x^2) \sin(y)^2}{a^8 \cos(y)^{10} - (a^8 - 4 a^6 x^2) \cos(y)^8 - x^8 - 2(2 a^6 x^2 - 3 a^4 x^4) \cos(y)^6 - 2(3 a^4 x^4 - 2 a^2 x^6) \cos(y)^4 - (4 a^2 x^6 - x^8) \cos(y)^2} \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{(Q^4 a^3 + 2 Q^2 a^5 - Q^2 a^3 rsx + 2 Q^2 a^3 x^2) \sin(y)^6 - (Q^4 a^3 + 2 Q^2 a^5 - Q^2 a^3 rsx - Q^2 a rsx^3 + 2 Q^2 a x^4 + (Q^4 a + 4 Q^2 a^3)x^2) \sin(y)^4}{a^8 \cos(y)^{10} - (a^8 - 4 a^6 x^2) \cos(y)^8 - x^8 - 2(2 a^6 x^2 - 3 a^4 x^4) \cos(y)^6 - 2(3 a^4 x^4 - 2 a^2 x^6) \cos(y)^4 - (4 a^2 x^6 - x^8) \cos(y)^2} \end{array} \right)$$

2. & 3. Spalte Riccitenor

$$\begin{array}{ccc}
 & 0 & 0 \\
 & & \\
 \frac{Q^2}{rsx^3 - x^4 - (Q^2 + a^2)x^2 - (Q^2 a^2 + a^4 - a^2 rsx + a^2 x^2) \cos(y)^2} & & 0 \\
 & 0 & \frac{Q^2}{a^2 \cos(y)^2 + x^2} \\
 & 0 & 0
 \end{array}$$

4. Spalte Riccitenor

$$\begin{pmatrix} -\frac{(Q^4 a^3 + 2 Q^2 a^5 - Q^2 a^3 r s x + 2 Q^2 a^3 x^2) \sin(y)^6 - (Q^4 a^3 + 2 Q^2 a^5 - Q^2 a^3 r s x - Q^2 a r s x^3 + 2 Q^2 a x^4 + (Q^4 a + 4 Q^2 a^3) x^2) \sin(y)^4}{a^8 \cos(y)^{10} - (a^8 - 4 a^6 x^2) \cos(y)^8 - x^8 - 2 (2 a^6 x^2 - 3 a^4 x^4) \cos(y)^6 - 2 (3 a^4 x^4 - 2 a^2 x^6) \cos(y)^4 - (4 a^2 x^6 - x^8) \cos(y)^2} & 0 \\ & 0 \\ -\frac{(Q^4 a^4 + Q^2 a^6 - Q^2 a^4 r s x + Q^2 a^4 x^2) \sin(y)^6 - (Q^4 a^4 - Q^2 a^4 r s x + Q^4 a^2 x^2 - Q^2 a^2 r s x^3) \sin(y)^4 - (Q^2 a^6 + 3 Q^2 a^4 x^2 + 3 Q^2 a^2 x^4 + Q^2 x^6) \sin(y)^2}{a^8 \cos(y)^8 + 4 a^6 x^2 \cos(y)^6 + 6 a^4 x^4 \cos(y)^4 + 4 a^2 x^6 \cos(y)^2 + x^8} & \end{pmatrix}$$

5 Ricciscalar

$$(t, x, y, z) \longmapsto 0$$

5.8.4.6 Zusammenfassung Metrik Schwarzer Löcher

5.8.4.6.1 Die Einsteintensoren

| | Nicht rotierend | Rotierend |
|-----------|---|--|
| Ungeladen | Schwarzschild Metrik Einsteintensor Null Vakuumlösung | Kerr-Metrik Einsteintensor Null Vakuumlösung |
| Geladen | Reissner-Nordström-Metrik Einsteintensor = Riccitenor | Kerr-Newman-Metrik Einsteintensor=Riccitenor |

5.8.4.6.2 Die Bereiche rotierender Schwarzer Löcher

Kerr-Newman-Metrik mit Ladung Q

$$g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \frac{r_s \cdot r - Q^2}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} - 1 & 0 & 0 & \frac{a(Q^2 - r_s \cdot r) \cdot \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} \\ 0 & \frac{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta}{r^2 - r_s \cdot r + a^2 + Q^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta & 0 \\ \frac{a(Q^2 - r_s \cdot r) \cdot \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} & 0 & 0 & \frac{(a^2 + r^2)^2 - a^2(r^2 - r_s \cdot r + a^2 + Q^2) \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

$$\xi = \frac{r_s \cdot r - Q^2}{\Sigma}$$

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta$$

$$\Delta = r^2 - r_s \cdot r + a^2 + Q^2$$

$$\chi = (a^2 + r^2)^2 - a^2 \cdot \Delta \cdot \sin^2 \theta$$

$$g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \xi - 1 & 0 & 0 & \frac{-a \cdot \xi \sin^2 \theta}{\Sigma} \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ \frac{-a \cdot \xi \sin^2 \theta}{\Sigma} & 0 & 0 & \frac{\chi \sin^2 \theta}{\Sigma} \end{pmatrix}.$$

Kerr-Metrik ohne Ladung Q

$$g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \frac{r_s \cdot r}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} - 1 & 0 & 0 & a \frac{r_s \cdot r}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} \sin^2 \theta \\ 0 & \frac{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta}{r^2 - r_s \cdot r + a^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta & 0 \\ a \frac{r_s \cdot r}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} \sin^2 \theta & 0 & 0 & \frac{((a^2 + r^2)^2 - a^2 \cdot (r^2 - r_s \cdot r + a^2) \cdot \sin^2 \theta) \cdot \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta} \end{pmatrix}$$

Mit folgenden Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{r_s \cdot r}{\Sigma} \\ \Sigma &= r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta \\ \Delta &= r^2 - r_s \cdot r + a^2 \\ \chi &= (a^2 + r^2)^2 - a^2 \cdot \Delta \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

liefert das $g_{ij}(t, r, \theta, \Phi) = \begin{pmatrix} \xi - 1 & 0 & 0 & a \xi \sin^2 \theta \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ a \xi \sin^2 \theta & 0 & 0 & \frac{\chi \cdot \sin^2 \theta}{\Sigma} \end{pmatrix}$. Damit gilt

| | <i>Ungeladen</i> | <i>Geladen</i> |
|---|--|---|
| Metrik | $g_{ij}^K = \begin{pmatrix} \xi - 1 & 0 & 0 & a \xi \sin^2 \theta \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ a \xi \sin^2 \theta & 0 & 0 & \frac{\chi \cdot \sin^2 \theta}{\Sigma} \end{pmatrix}$ | $g_{ij}^{KN} = \begin{pmatrix} \xi - 1 & 0 & 0 & -a \cdot \xi \sin^2 \theta \\ 0 & \frac{\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma & 0 \\ -a \cdot \xi \sin^2 \theta & 0 & 0 & \frac{\chi \cdot \sin^2 \theta}{\Sigma} \end{pmatrix}$ |
| Ereignishorizont r_H^+ Cauchy Horizont r_H^- | $\Delta = r^2 - r_s \cdot r + a^2 = 0$ $r_H^+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$ $r_H^- = M - \sqrt{M^2 - a^2}$ | $\Delta = r^2 - r_s \cdot r + a^2 + Q^2 = 0$ $r_H^+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$ $r_H^- = M - \sqrt{M^2 - a^2 - Q^2}$ |
| Ergosphäre | $\xi = \frac{r_s \cdot r}{\Sigma} = 1$ | $\xi = \frac{r_s \cdot r - Q^2}{\Sigma} = 1$ |
| Symbole | $\xi = \frac{r_s \cdot r}{\Sigma}$ $\Sigma = r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta$ $\Delta = r^2 - r_s \cdot r + a^2$ $\chi = (a^2 + r^2)^2 - a^2 \cdot \Delta \cdot \sin^2 \theta$ | $\xi = \frac{r_s \cdot r - Q^2}{\Sigma}$ $\Sigma = r^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta$ $\Delta = r^2 - r_s \cdot r + a^2 + Q^2$ $\chi = (a^2 + r^2)^2 - a^2 \cdot \Delta \cdot \sin^2 \theta$ |

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version







Man sieht, dass sich die Metriken strukturell bis auf eine Konstante Q^2 und einem Vorzeichen gleichen. Damit gilt das Gesagte für die Ergosphären und die Ereignishorizonte für ungeladene Schwarze Löcher bis auf die Konstante Q^2 ebenfalls für geladene Schwarze Löcher.

Die Gravitationskonstante G , die Lichtgeschwindigkeit c und die Coulomb-Konstante k_C wurden bei allen Metriken gleich 1 gesetzt. Dies bedeutet z. B., dass der Schwarzschildradius r_s mit $r_s = 2 \cdot M$ oder $r_s = 2 \cdot m$ angegeben ist. Bei den Berechnungen mit Sagemath habe ich die Bezeichnung der Koordinaten in (t, x, y, z) geändert.

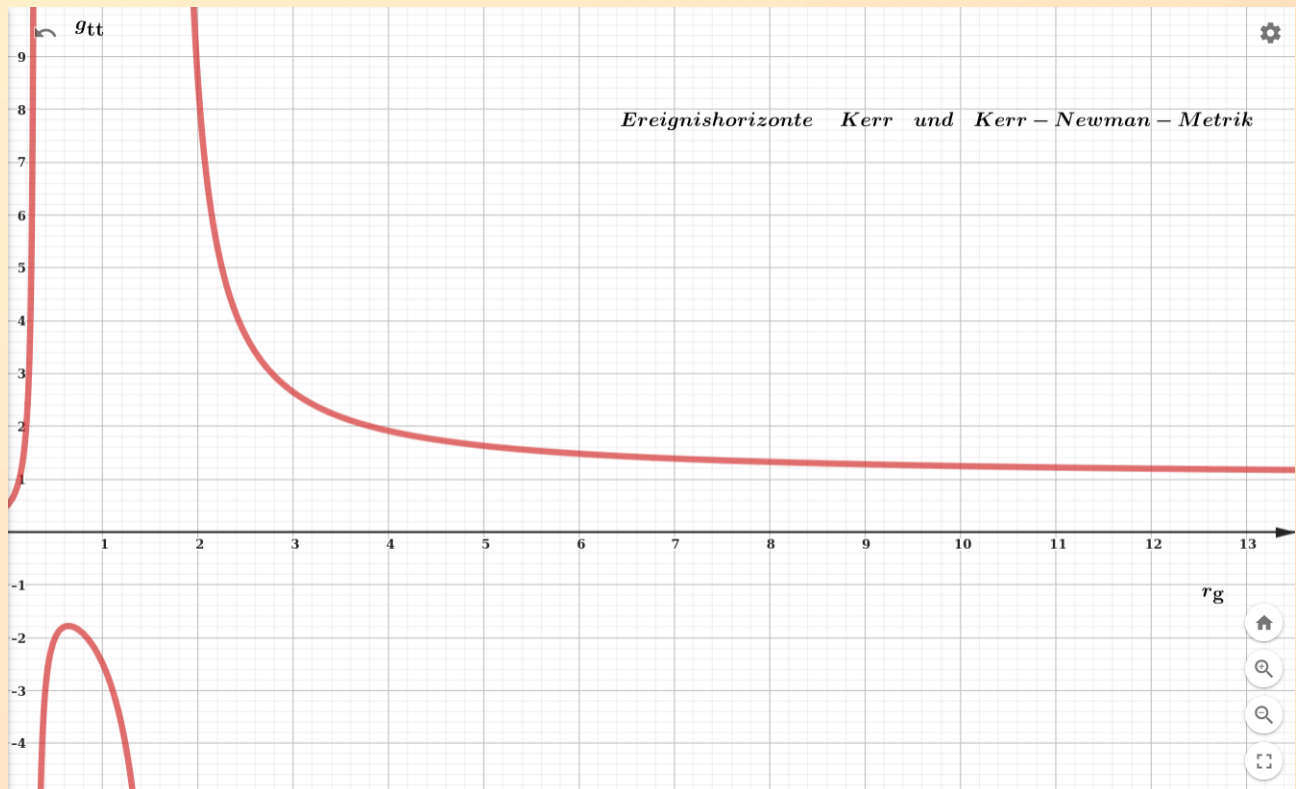
Bei der Berechnung der Tensoren mit SageMath empfiehlt sich die Benutzung von 30 Kernen, damit das Ergebnis nach ca. fünf Minuten als Latex-Skript erscheint.

Die Bilder für den Metrikensoren, die Christoffel-Symbole und den Riccitenor sind leider zu klein. Deshalb habe ich den Riccitenor spaltenweise aufgeteilt. Es ist trotzdem ratsam, sich mit einer Bildschirmlupe, die Bilder ausschnittsweise vergrößern anzeigen zu lassen.

Mit folgenden Parametern wurde ein Plot der Ereignishorizonte der entsprechenden Metriken für rotierende Schwarze Löcher erstellt. Für $Q=0$ erhält man die Kerr-Metrik.

| | |
|----------------------------------|---|
| <input type="radio"/> | $a = 0.4$ 0  1  |
| <input type="radio"/> | $Q = 0.1$ 0  1  |
| <input type="radio"/> | $\theta = 0$ 0  6.2831853071796  |
| <input checked="" type="radio"/> | $g_{11}(r) = \text{Wenn}\left(r > 0, \frac{r^2 + a^2 \cos(\theta) \cos(\theta)}{r^2 - 2 r + a^2 + Q^2}\right)$ $= \frac{r^2 + 0.4^2 \cos(0) \cos(0)}{r^2 - 2 r + 0.4^2 + 0.1^2}, \quad (r > 0)$ |
| <input type="radio"/> | $Text1 = "g_{tt}"$ |
| <input type="radio"/> | $Text2 = "r_g"$ |
| <input type="radio"/> | $Text3 = "Ereignishorizonte \quad Kerr \quad \text{und} \quad K"$ |

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version



<https://www.geogebra.org/calculator/fy6atqtn>

Anhang

A.1 Die Planckeinheiten

| Name | Größe | Dimension | Term | Wert in SI-Einheiten | Wert in anderen Einheiten |
|-------------------|------------|-----------|---|--|---------------------------------------|
| Planck-Masse | Masse | M | $m_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}$ | $2,176 \cdot 10^{-8}$ kg ^[2] | $1,311 \cdot 10^{19}$ u |
| Planck-Länge | Länge | L | $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ | $1,616 \cdot 10^{-35}$ m ^[3] | $3,054 \cdot 10^{-25}$ a ₀ |
| Planck-Zeit | Zeit | T | $t_P = \frac{l_P}{c}$ | $5,391 \cdot 10^{-44}$ s ^[4] | |
| Planck-Ladung | Ladung | IT | $q_P = \sqrt{\hbar c 4 \pi \epsilon_0}$ | $1,876 \cdot 10^{-18}$ C | 11,71 e |
| Planck-Temperatur | Temperatur | Θ | $T_P = \frac{m_P c^2}{k_B}$ | $1,417 \cdot 10^{32}$ K ^[5] | |

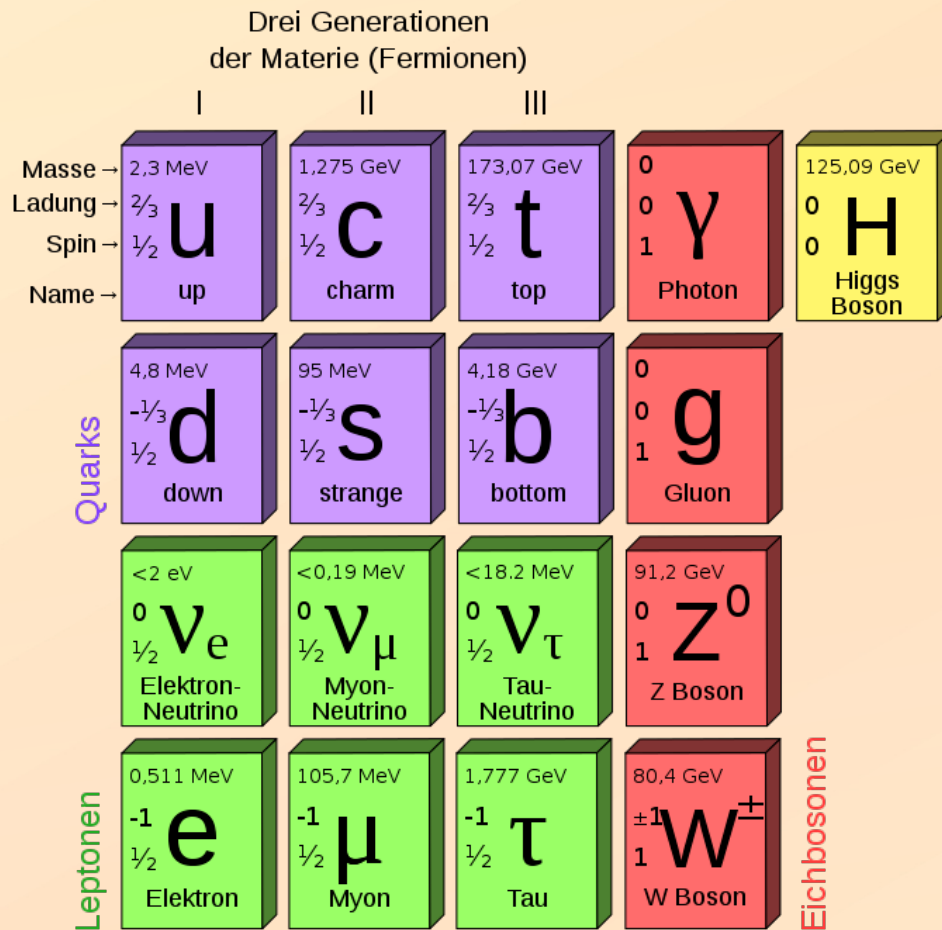
| Name | Größe | Dimension | Term | Wert in SI-Einheiten |
|----------------------|---------------|---------------------------------|--|--|
| Planck-Fläche | Fläche | L ² | $l_P^2 = \frac{\hbar G}{c^3}$ | $2,612 \cdot 10^{-70}$ m ² |
| Planck-Volumen | Volumen | L ³ | $l_P^3 = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}^3$ | $4,222 \cdot 10^{-105}$ m ³ |
| Planck-Energie | Energie | ML ² T ⁻² | $E_P = m_P c^2 = \frac{\hbar}{t_P} = \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}}$ | $1,956 \cdot 10^9$ J $= 1,2209 \cdot 10^{28}$ eV $= 543,4$ kWh |
| Planck-Impuls | Impuls | MLT ⁻¹ | $m_P c = \frac{\hbar}{l_P} = \sqrt{\frac{\hbar c^3}{G}}$ | $6,525$ kg m·s ⁻¹ |
| Planck-Kraft | Kraft | MLT ⁻² | $F_P = \frac{E_P}{l_P} = \frac{\hbar}{l_P t_P} = \frac{c^4}{G}$ | $1,210 \cdot 10^{44}$ N |
| Planck-Leistung | Leistung | ML ² T ⁻³ | $P_P = \frac{E_P}{t_P} = \frac{\hbar}{t_P^2} = \frac{c^5}{G}$ | $3,628 \cdot 10^{52}$ W |
| Planck-Dichte | Dichte | ML ⁻³ | $\rho_P = \frac{m_P}{l_P^3} = \frac{\hbar t_P}{l_P^3} = \frac{c^5}{\hbar G^2}$ | $5,155 \cdot 10^{96}$ kg·m ⁻³ |
| Planck-Kreisfrequenz | Kreisfrequenz | T ⁻¹ | $\omega_P = \frac{1}{t_P} = \sqrt{\frac{c^5}{\hbar G}}$ | $1,855 \cdot 10^{43}$ s ⁻¹ |

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

| | | | | |
|-----------------------|-------------------------|---|---|--|
| Planck-Druck | Druck | $\text{ML}^{-1}\text{T}^{-2}$ | $p_P = \frac{F_P}{l_P^2} = \frac{\hbar}{l_P^3 t_P} = \frac{c^7}{\hbar G^2}$ | $4,633 \cdot 10^{113} \text{ Pa}$ |
| Planck-Strom | Elektrischer Strom | QT^{-1} | $I_P = \frac{q_P}{t_P} = \sqrt{\frac{c^6 4\pi\epsilon_0}{G}}$ | $3,479 \cdot 10^{25} \text{ A}$ |
| Planck-Spannung | Elektrische Spannung | $\text{ML}^2\text{T}^{-2}\text{Q}^{-1}$ | $U_P = \frac{E_P}{q_P} = \frac{\hbar}{t_P q_P} = \sqrt{\frac{c^4}{G 4\pi\epsilon_0}}$ | $1,043 \cdot 10^{27} \text{ V}$ |
| Planck-Impedanz | Widerstand | $\text{ML}^2\text{T}^{-1}\text{Q}^{-2}$ | $Z_P = \frac{V_P}{I_P} = \frac{\hbar}{q_P^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c} = \frac{Z_0}{4\pi}$ | $29,98 \Omega$ |
| Planck-Beschleunigung | Beschleunigung | LT^{-2} | $g_P = \frac{F_P}{m_P} = \sqrt{\frac{c^7}{\hbar G}}$ | $5,56 \cdot 10^{51} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ |
| Planck-Magnetfeld | Magnetische Flussdichte | $\text{MT}^{-1}\text{T}^{-2}$ | $B_P = \sqrt{2\mu_0 p_P} = \frac{\sqrt{\frac{c^9 \epsilon_0}{2\hbar}}}{G}$ | $4,29361 \cdot 10^{59} \text{ T}$ |

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Planck-Einheiten>

A.2 Aufbau der Materie



Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Neutrino>

A.3 Die Gravitationskonstante

| Physikalische Konstante | |
|--|--|
| Name | Gravitationskonstante |
| Formelzeichen | G |
| Wert | |
| SI | $6,674\,08 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$ |
| Unsicherheit (rel.) | $4,7 \cdot 10^{-5}$ |
| Quellen und Anmerkungen | |
| Quelle SI-Wert: CODATA 2014 (Direktlink) | |

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Gravitationskonstante>

A.4 Lichtjahr

| Physikalische Einheit | |
|---|--|
| Einheitenname | Lichtjahr |
| Einheitenzeichen | Lj, ly |
| Physikalische Größe(n) | Länge |
| Formelzeichen | s, d |
| Dimension | L |
| In SI-Einheiten | $1 \text{ Lj} = 9\,460\,730\,472\,580\,800 \text{ m}$ $\approx 9,460\,73 \cdot 10^{15} \text{ m}$ $\approx 9,46 \cdot 10^{15} \text{ m}$ |
| Abgeleitet von | Lichtgeschwindigkeit, Julianisches Jahr |
| Siehe auch: Parsec, Astronomische Einheit | |

Quelle: <https://de.wikipedia.org/wiki/Lichtjahr>

A.5 Der Energie-Impulstensor

Der Energie-Impulstensor in seiner allgemeinen Form lautet:

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} w & \frac{s_x}{c} & \frac{s_y}{c} & \frac{s_z}{c} \\ \frac{s_x}{c} & G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ \frac{s_y}{c} & G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ \frac{s_z}{c} & G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{pmatrix}$$

Relativitätstheorie V1.2 bearbeitete Version

Die folgenden Tabellen erklären die Bedeutung der Symbole.

| Symbol | Bedeutung |
|--|--|
| w | Energiedichte oder Energie pro Volumen. Die Energie wird über mc^2 für Massen oder über $\mathbf{h} \cdot \mathbf{v}$ bei elektromagnetischer Strahlung berechnet. Die Energiedichte beschreibt den Energiefluss durch ein raumartiges Volumenelement. |
| $\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_z$ | Energiestromdichte: Energie multipliziert mit der Geschwindigkeit. |
| c | Lichtgeschwindigkeit im Vakuum |
| G_{ik} | Im Fall elektromagnetischer Strahlung der negative Maxwellsche Spannungstensor. Sonst die Impulsstromdichte. |

| Komponente | Bedeutung |
|----------------------------|---|
| T^{00} | (Energiedichte, Massendichte) beschreibt den Energiefluss (Massenfluss) in zeitartige Richtung, also den Energiefluss durch ein raumartiges 3D-Volumenelement. |
| $T^{i0}; i=1, \dots, 3$ | (räumlicher Energiefluss, räumlicher Massenfluss) beschreiben die Energiestromdichte (Massenstromdichte) in räumliche i -Richtung, also den Energiefluss durch ein 3D-Volumenelement mit einer zeitartigen und zwei raumartigen Achsen. |
| $T^{0j}; j=1, \dots, 3$ | (Impulsdichte) beschreiben den Impulsfluss der j Komponente des Impulses in zeitartige Richtung, also den Impulsfluss der j Komponente des Impulses durch ein raumartiges 3D-Volumenelement. |
| $T^{ij}; i, j=1, \dots, 3$ | (Impulsstromdichte) beschreiben den Impulsfluss der j -Komponente des Impulses in die räumliche i -Richtung, also den Impulsfluss der j -Komponente durch ein 3D-Volumenelement mit einer zeitartigen und zwei raumartigen Achsen. |

| Symmetrie | Bedeutung |
|----------------------------------|--|
| $T^{k0} = T^{0k}$ | Die Massenstromdichte (Energiestromdichte) ist gleich der Impulsdichte; das ist eine Konsequenz aus dem Schwerpunktsatz ⁵⁹ . |
| $T^{ij} = T^{ji}; i=1, \dots, 3$ | Die Scherspannungen sind symmetrisch: Ein Transport der j -Komponente des Impulses in i -Richtung ist stets begleitet von einem gleich großen Transport der i -Komponente des Impulses in j -Richtung. Das ist eine Konsequenz der Drehimpulserhaltung ⁶⁰ . |

⁵⁹ Siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Schwerpunktsatz>

A.6 Größe des Universums

| Physikalische Eigenschaften (bezogen auf das beobachtbare Universum) | |
|--|--|
| Radius | > 45 Mrd. Lj ^[1] |
| Masse (sichtbar) | ca. 10^{53} kg |
| Mittlere Dichte | ca. $4,7 \cdot 10^{-30}$ g/cm ³ |
| Alter | $13,81 \pm 0,04$ Mrd. Jahre ^[2] |
| Anzahl Galaxien | ca. 200 Mrd. ^[3] |
| Temperatur Hintergrundstrahlung | 2,7 K |
| Anmerkung: Das Hubble Ultra Deep Field umfasst einen Raumwinkel, der ungefähr dem 150. Teil der durchschnittlichen Mondscheibe entspricht. | |

60 Siehe: <https://de.wikipedia.org/wiki/Drehimpuls>

Nachwort

Leider leide ich an kleinzelligen Lungenkrebs. Ich bekomme Chemotherapie und Strahlentherapie als lebensverlängernde Maßnahmen. Ich hoffe, das ich dieses Jahr noch überlebe, sodass ich vielleicht noch weitere Verbesserungen am Skript durchführen kann. Falls es eben nicht geht, dann bleibt alles beim Alten, zumindest was das Skript betrifft.

Vielleicht sind noch unbeschriftete Bilder von mir im Skript. Die Grafiken, die von mir mit Geogebra erstellt wurden, sind alle durchweg gemeinfrei, auch wenn es nicht explizit im Text erwähnt ist.

Im April 2024 habe ich sehr viel am Skript gearbeitet. Hinzugekommen sind die Kapitel über die Metriken Schwarzer Löcher. Dazu habe ich sehr viele Grafiken mit Geogebra erstellt. Sie sind im Skript mit den entsprechenden Links zu den Vorlagen enthalten.

Ich habe die Updates zum Skript in einem rolling release Verfahren aktualisiert. Deshalb ist das E-Book noch nicht auf den neuesten Stand. Liegt einmal eine finale Version des Skripts vor, dann wird auch das E-Book aktualisiert.

18.04.2024: Mir ist aufgefallen, dass einige Links nicht mehr funktionieren. Deshalb habe ich heute noch einmal alle Links überprüft und entsprechend entfernt, wenn sie ins Leere führen. Darüber hinaus habe ich weitere Grafiken mit Geogebra hinzugefügt. Da diese auch über Parameter gesteuert sind, kann man über die angegebenen Links auf der Seite von Geogebra die interaktiven Grafiken abrufen. Für die dreidimensionalen Projektionen habe ich Polarkoordinaten gewählt.

20.04.2024: Ich versuche, ab heute eine neue Version des E-Books zu erstellen. Ist bestimmt viel zu tun, so wie beim ersten Mal.

23.04.2024: Ich habe gerade eine vorläufige Version des E-Books erstellt. Leider werden bei der Konvertierung durch das Schreibprogramm LibreOffice Matrixklammern und Wurzeln zu dick dargestellt. Bei Wurzeln kann man sich mit der Potenzschreibweise weiter behelfen. Bei Matrixklammer muss man die dicken Klammern in Kauf nehmen.

25.04.2024: Die Umstellung auf das E-Book Format epub Version 3 ist beendet und auf der Webseite verfügbar. Leider kann man dieses Format auf Webseiten wie Neobooks oder Amazon nicht verwenden, weil die Datei zu groß ist. Hier muss man die Datei aufteilen und mit Calibre umwandeln und nacharbeiten. Die Umwandlung erfolgt am besten als ein HTML-Archiv. Dort sind die Formel als Bilder gespeichert und man spart sich die Mühe diese mir Libreoffice zu bearbeiten.

Günter Opitz-Ohlsen, im April 2024